اجابات الفصل الأول

الفرع العلمي والصناعي

حلول الوحدة الاولى / حساب التفاضل

تمارين (١-١) صفحة ٨

السؤال الأول: أ) مقدار التغير في ق(س) = ق(٥) – ق(٣) = $\frac{٧٨}{٥}$

ب) متوسط التغير للاقتران ق(س) عندما تتغير س من ٤ الى ١ يساوي = $\frac{ق(١)-ق(٤)}{١-٤} = \frac{٥١}{١٢} = \frac{١٧}{٤}$

السؤال الثاني: متوسط التغير للاقتران ق(س) في الفترة $[\pi ، \frac{\pi}{٢}]$ = $\frac{ق(\pi)-ق(\frac{\pi}{٢})}{\pi-\frac{\pi}{٢}} = \frac{٤}{\pi}$

السؤال الثالث :متوسط التغير = $\frac{ق(ا)-ق(١)}{ا-١} = \frac{(ا-٦)-٢ا+٢ا}{ا-١} = \frac{٥-٢ا٢}{ا-١} = ٩$

ومنها $٢ا^{٢} - ٥ = ٩ا - ٩$ وبالتالي $٢ا^{٢} - ٩ا + ٤ = ٠ = (ا-١)(ا-٤)$

$ا = \frac{١}{٢}$ (مرفوض لأن أ >٢) ، $ا = ٤$ ومنها $ا = ٤$

السؤال الرابع : متوسط التغير للاقتران ك (س) في الفترة $[١،٣]$

$= \frac{ك(٣)-ك(١)}{٢} = \frac{(٣)ق٣+٩-((١)ق٣+١)}{٢} = \frac{(٣)ق٣+٨-(١)ق}{٢} = ٣ + ٤ = \frac{ق(٣)-ق(١)}{٢}$

$= ٤ + ٣ \times ٤ = ١٦$

السؤال الخامس: ميل المستقيم ل = ظا٥ ١٣٥ = $\frac{ق(٣)-ق(١)}{٢} = -١$

متوسط التغير في الاقتران هـ(س) = $\frac{هـ(٣)-هـ(١)}{٢}$

$= \frac{(١)ق٣-١-٩+(٣)ق٣}{٢} = \frac{(١)ق-١-١+(٣)ق٣}{٢} = ٣ + \frac{٨}{٢} = \frac{ق(٣)-ق(١)}{٢}$ $٣ + ٤ \times ١ - ١ = ١$

السؤال السادس: السرعة المتوسطة في الفتر ة $[١،٣]$

$= \frac{ف(٣)-ف(١)}{٣-١} = \frac{٩+٣ب-(ب+١)}{٣-١} = ٦$

ومنها ٢ب + ٨ = ١٢ وبالتالي ب=٢

شركة الراتب للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبدالرحمن شقير
00970568-952714

السؤال السابع: متوسط التغير للاقتران ق (س)

$$= \frac{\text{ن}(\text{ن}) - \text{ن}(٢)}{\text{ن} - ٢} = \frac{\text{ن}^{٢}\text{أ} + \text{ن}\text{ب} + \text{جـ} - (٤\text{أ} + ٢\text{ب} + \text{جـ})}{\text{ن} - ٢}$$

$$= \frac{(\text{ن} - ٢)\text{ب} + (\text{ن}^{٢} - ٤)\text{أ}}{\text{ن} - ٢} = (\text{ب} + (٢ + \text{ن})\text{أ}) \times \frac{\text{ن} - ٢}{\text{ن} - ٢} = (\text{ب} + (٢ + \text{ن})\text{أ}) = \text{ب} + (٢ + \text{ن})\text{أ}$$

السؤال الثامن :أ) متوسط التغير في الاقتران ق(س) عندما تتغير س من ٠ إلى ١

$$= \frac{\text{و}(١) - \text{و}(٠)}{١ - ٠} = \text{و}(١) - \text{ن}(٠)$$

$$= ١ + \text{هـ}^{١+١} - (٠ + \text{هـ}^{١+٠}) = ١ + \text{هـ}^{٢} - \text{هـ}$$

ب) متوسط التغير للاقتران ق(س) عندما تتغير س من ١ إلى هـ

$$= \frac{\text{ن}(\text{هـ}) - \text{ن}(١)}{\text{هـ} - ١} = \frac{\text{هـ}^{\text{ن}} - (١ + \text{ن}\ln ١)}{\text{هـ} - ١} = \frac{\text{هـ} - ٣}{\text{هـ} - ١} = \frac{\text{هـ} + \text{ن} - ١}{\text{هـ} - ١}$$

ومنها ن - ١ = -٣ وبالتالي ن =-٢

شركة الراتب للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبدالرحمن شاهين
00970568-952714

تمارين (١-٢) صفحة ١٧

السؤال الأول :

أ) $\text{ن}'(\text{س}) = ٥\text{س}^{٤} - ٢\text{س}$ ومنها $\text{ن}'(-١) = ٥ + ٢ = ٧$

ب) $\text{ن}'(\text{س}) = (\text{س}^{٣} - ١) \times ١ + ٣\text{س}^{٢}(١٢ + \text{س})$

ومنها $\text{ن}'(٣) = ٢٦ + ٢٧(١٢ + ٣) = ٤٣١$

ج) $\text{ن}'(\text{س}) = \frac{(٥ - \text{س}^{٢}) \times ٢\text{س} - -٢\text{س} \times \text{س}^{٢}}{(٥ - \text{س}^{٢})^{٢}}$ ومنها $\text{ن}'(-٢) = -٢٠$

السؤال الثاني : أ) $(ن + هـ^{٢})' (س) = ن' (س) + هـ(س) هـ' (س) + هـ' (س) \times هـ(س)$

$= ن' (س) + ٢هـ' (س) \times هـ(س)$ $= ن' (١) + ٢هـ' (١) \times هـ(١)$

$= ٣ + ٢ \times -١ \times ٣ - = ٩$

ب) $\left(\frac{س^{٢} ن(س)}{هـ(س)} \right)' (١) = \left(س^{٢} ن' (س) + ٢س ن(س) + \frac{٣هـ' (س)}{هـ^{٢} (س)} \right) (١)$

$= \left(ن' (١) + ٢ن(١) + \frac{٣هـ' (١)}{هـ^{٢} (١)} \right) = ٣ + ٤ + ٩ - = ٢-$

السؤال الثالث: $\left(\frac{ن}{هـ} \right)' (١) = \frac{ن' (١) هـ(١) - هـ' (١) \times ن(١)}{هـ^{٢} (١)}$

نجد $ن' (١)$ من اشتقاق $ن(س)$ حيث $ن' (١) = ٠$ ، $ق(١) = \frac{١}{٢}$

ميل المماس = ظل الزاوية التي يصنعها المماس مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

$= ظا ١٥° = - \frac{١}{\sqrt{٣}}$

ومنها $هـ' (١) = - \frac{١}{\sqrt{٣}}$ ، $هـ(١) = ١$

بالتعويض ينتج أن: $\left(\frac{ن}{هـ} \right)' (١) = \frac{١}{٢\sqrt{٣}}$

السؤال الرابع: أ) $ص' = \frac{س + ١ - س}{(س + ١)^{٢}} = \frac{١}{(س + ١)^{٢}}$ ، $ص'' = \frac{-٢}{(س + ١)^{٣}}$

الطرف الأيمن = $٢ \times \frac{س}{(س + ١)} \times \frac{١}{(س + ١)^{٢}} + س \times \frac{-٢}{(س + ١)^{٣}} = ٠$ **= الطرف الأيسر**

ب) $ص = ٢١ س^{٥} + ٥س^{-٤}$ ، $ص' = ٢٥ س^{٤} - ٢٠ س^{-٥}$

$ص'' = ٢٠ \times ٢١ س^{٣} + ٢٠ \times ١٠٠ س^{-٦} = ٢٠ \times ٢١ س^{٣} + \frac{١٠٠}{س^{٦}} = ٢٠ (٢١ س^{٣} + ٥س^{-٦})$

ومنها $ص'' = \frac{٢٠}{س^{٢}} (٢١ س^{٥} + \frac{٥}{س^{٤}}) = \frac{٢٠ص}{س^{٢}}$

السؤال الخامس : بعد التبسيط $ن(س) = (١ - س^{١٦})$ ومنها $ن'(س) = -٦ س^{١٥}$

$ن'(١) = -١٦$

السؤال السادس : أولا: $ن(س) = س^{٢}$ ومنها $ن'(س) = ٢س$

أ) $ن'(٠) = ٠$

ب) $هـ'(٠)$ غير موجودة لأن هـ(س) غير متصل عندها

جـ) $(ن \times هـ)(س) = \begin{cases} ٠ & ، \quad س \in \left[٠، \frac{١}{٢}\right) \\ -س^{٢} & ، \quad س \in \left(٠، -\frac{١}{٢}\right) \end{cases}$

لاحظ ان الاقتران الجديد متصل عندما س = ٠

د) لاحظ أنه لا يمكن تحديد وجود $(ن \times هـ)'(٠)$ باستخدام مشتقة حاصل الضرب

$(ن \times هـ)'(س) = \begin{cases} ٠ & ، \quad س \in \left(٠، \frac{١}{٢}\right) \\ -٢س & ، \quad س \in \left(٠، -\frac{١}{٢}\right) \end{cases}$ ومنها $(ن \times هـ)'(٠) = ٠$

ثانيا : نستنتج أنه لا يمكن الحكم على وجود أو عدم وجود المشتقة باستخدام قواعد الاشتقاق لذلك نعود إلى إيجاد قاعدة الاقتران الأصلي ثم نحدد وهذا لا يتناقض مع القاعدة المذكورة .

السؤال السابع : $ن(س) = س^{٤} + ا س^{٣} - ٣$ ، $ن'(س) = ٤س^{٣} + ٣ا س^{٢}$

$ن''(س) = ١٢ س^{٢} + ٦ا س$ ، $ن^{(٣)}(س) = ٢٤س + ٦ا$ ،

$ن^{(٣)}(٢) = ٢٤ \times ٢ + ٦ا = ١٨$ ومنها $ا = -٥$

السؤال الثامن : $ن(س) = س^{ن}$ ، $ن'(س) = نس^{ن-١}$ ، $ن''(س) = ن(ن-١)س^{ن-٢}$

$ن'''(س) = ن(ن-١)(ن-٢)س^{ن-٣} = اس$ ومنها $ن - ٣ = ١$ ، $ن = ٤$ ،

لكن $ن(ن-١)(ن-٢) = ا$ ومنها $ا = ٢٤$

شركة الرائد للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبدالرحمن شقير
00970568-952714

تمارين (١-٣) صفحة ٢١

السؤال الأول :

أ) $\frac{ص}{س} = -٢جاس - ٢قا^{٢}س$

ب) $\frac{ص}{س} = \frac{(١+قاس)(-قاس ظاس)-(١-قاس)(قاس ظاس)}{(١+قاس)^{٢}} = \frac{-٢قاس ظاس}{(١+قاس)^{٢}}$

ج) $\frac{ص}{س} = \frac{قتاس+ظتاس+س قتاس ظتاس+س قتا^{٢}س}{(قتاس+ظتاس)^{٢}} = \frac{١+س قتاس}{قتاس+ظتاس}$

د) $\frac{ص}{س} = ٢س قاس + س^{٢} قاس ظاس = س قاس(٢+س ظاس)$

السؤال الثاني : $\frac{ص}{س} = قا^{٢}س = ١+ظا^{٢}س$ **(يتم التعامل مع مشتقة ظا^{٢}س على أنها حاصل ضرب)**

$\frac{ص^{٢}}{س} = ٢قا^{٢}س ظاس = ٢ظاس(١+ظا^{٢}س) = ٢ص(١+ص^{٢})$

السؤال الثالث : $\frac{ص}{س} = \frac{س جتاس - جاس}{س^{٢}}$

$\frac{ص^{٢}}{س^{٢}} = \frac{-س^{٢}جاس - ٢س جتاس + ٢جاس}{س^{٣}}$

الآن الطرف الأيمن= $\frac{ص^{٢}}{س^{٢}} + \frac{٢}{س}\frac{ص}{س} + ص$

$= \frac{-س^{٢}جاس - ٢س جتاس + ٢جاس}{س^{٣}} + \frac{٢}{س} \times \frac{س جتاس - جاس}{س^{٢}} + \frac{جاس}{س} = ٠$ **(مع التبسيط والاختصار)**

السؤال الرابع : $ن'(س) = س+جاس$ ، $ن''(س) = ١+جتاس = ٠$

ومنها جتاس $= -١$ ، س $= \pi$ ، س $= -\pi$

تمارين (١-٤) صفحة ٢٩

السؤال الأول :

ا) ناتج التعويض = ÷ وبالتالي قيمة النهاية = $\lim_{س\to ١} \frac{هـ^{س-١}-١}{\frac{١}{س}} = \frac{هـ^{٠}-١}{١} = ٠$

ب) ناتج التعويض = ÷ وبالتالي قيمة النهاية= $\lim_{س\to ٠} \frac{٤}{قا^{٢}س} = ٤$

ج) ناتج التعويض = ÷ وبالتالي قيمة النهاية = $\lim_{س\to ٠} \frac{١-جتاس}{٣س^{٢}}$ وناتج التعويض = ÷

نطبق قاعدة لوبيتال مرة اخرى فتصبح $\lim_{س\to ٠} \frac{جاس}{٦س}$ وناتج التعويض ÷ تطبق قاعدة

لوبيتال مرة أخرى فتصبح $\lim_{س\to ٠} \frac{جتاس}{٦} = \frac{١}{٦} \Leftarrow \lim_{س\to ٠} \frac{س-جاس}{س^{٣}} = \frac{١}{٦}$

السؤال الثاني :

أ) $\frac{ص}{س} = -جاس \times هـ^{س} + هـ^{س} جتاس$

ب) $ص = \frac{١}{٢} لـو_{هـ} س$ ومنها $\frac{ص}{س} = \frac{١}{٢س}$

ج) $ص = \frac{١}{٢} لـو_{هـ} س^{-٥} = \frac{-٥}{٢} لـو_{هـ} س$ ومنها $\frac{ص}{س} = \frac{-٥}{٢س}$

د) $ص = (هـ^{س}-٢)(هـ^{س}+٢)$

$\frac{ص}{س} = (هـ^{س})(هـ^{س}+٢)+(هـ^{س}-٢)(هـ^{س})$ ، ومنها $\frac{ص}{س} = ٢هـ^{٢س}$

السؤال الثالث : أ) $\lim_{هـ\to ٠} \frac{ن(٣+٥هـ)-ن(٣)}{١٠هـ} = ن'(٣) = \frac{١}{٤} \times ٢ = \frac{٥}{١٠}$ **(بفرض و=٥ هـ)**

ب) $\lim_{س\to ١} \frac{ن(س)-ن(١)}{س-١} = \lim_{س\to ١} \frac{\frac{س^{٢}-١}{س-١}}{س-١}$ **بقسمة البسط والمقام على (س-١)**

شركة الراتب للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبدالرحمن شقلب
00970568-952714

$$= -\lim_{س\to ١} \frac{\frac{س+١}{ن(س)-ن(١)}}{س-١} = \frac{-٢}{ن'(١)} = \frac{-٢}{-٢} = ١$$

السؤال الرابع : $ص' = ٢س + هـ^{س} = ص = س^{٢} + هـ^{س} + ١$ ومنها $س^{٢} - ٢س + ١ = ٠$

وبحل المعادلة ينتج أن: $س = ١$

السؤال الخامس : بما أن ناتج التعويض $= \frac{٠}{٠}$ نستخدم قاعدة لوبيتال

$$\lim_{س\to ٢} \frac{س^{ن} - ٢^{ن}}{س^{٢} - ٢^{٢}} = \lim_{س\to ٢} \frac{ن س^{ن-١}}{٢س^{٢-١}} = \frac{ن}{٢} ٢^{ن-٢} = \frac{ن}{٢} ٢^{ن-٢}$$

السؤال السادس : لاحظ أن ناتج التعويض $= \frac{٠}{٠}$

قيمة النهاية $= \lim_{س\to ١} \frac{ن(١) - ن'(س)}{١} = ن(١) - ن'(١) = ٦ - ٣ = ٣$

السؤال السابع : نفرض $٢س = ع$ ومنها $س = \frac{ع}{٢}$ عندما $س \to ١$ فإن $ع \to ٢$

$$\text{النهاية} = \lim_{ع\to ٢} \frac{ن'(ع) - ن'(٢)}{\frac{ع}{٢} - ١} = ٢ \lim_{ع\to ٢} \frac{ن'(ع) - ن'(٢)}{ع - ٢} = ٢ن''(٢) = ٢ \times ٥ = ١٠$$

تمارين (١-٥) صفحة ٣٦

السؤال الأول: ميل المستقيم $= -\frac{١}{٢}$ ، ميل المماس $= ٢$ لأنه عمودي عليه .

ميل المنحنى = ميل المماس ومنها $٢س - ٢ = ٢$ ، $س = ٢$

نقطة التماس $= (٢، ١)$

السؤال الثاني : $ن'(س) = -٢ظاس \, قا^{٢} س$

ميل المماس $= ن'(\frac{\pi}{٤}) = -٢ظا\frac{\pi}{٤} \, قا^{٢}\frac{\pi}{٤} = -٤$

$ن(\frac{\pi}{٤}) = ٣ - ظا^{٢}\frac{\pi}{٤} = ٣ - ١ = ٢$ ومنها نقطة التماس $(\frac{\pi}{٤}، ٢)$

معادلة المماس $ص - ٢ = -٤(س - \frac{\pi}{٤})$ ومنها $ص = -٤س + \pi + ٢$

السؤال الثالث : $ن'(س) = \frac{١}{س}$ ميل المماس $= ن'(٢) = \frac{١}{٢}$ ، $ن(٢) = ٠$

معادلة المماس هي $ص - ٠ = \frac{١}{٢}(س - ٢)$ ومنها $ص = \frac{١}{٢}س - ١$

المماس يقطع محور السينات في النقطة ب $(٢، ٠)$ والصادات في النقطة جـ $(٠، -١)$

مساحة المثلث ب ج $= \frac{١}{٢} \times ٢ \times ١ = ١$ وحدة مساحة

السؤال الرابع : ميل المماس $= \frac{١}{٦}$ ، $ن'(س) = \frac{-٦}{(س - ٢)^{٢}}$

ميل المماس $= ن'(س) = \frac{-٦}{(س - ٢)^{٢}} = \frac{-١}{٦}$

وبحل المعادلة ينتج أن: س $= ٨$ أو س $= -٤$

عندما س$=٨$ ، ص $= ٤$ ، $أ = ٣٢$ ، وعندما س$=-٤$ ، ص $= ٢$ ، $أ = ٨$

السؤال الخامس : أقصى ارتفاع عندما السرعة = صفر أي أن: $٤٠ - ١٠ن = ٠$، ومنها $ن = ٤$

$ف(٤) = ٨٠م$

المسافة الكلية المقطوعة $= ١٠٠ = ٢ \times ٨٠ - ف(ن)$

$ف(ن) = ٦٠$ ، أي يكون الجسم على ارتفاع ٦٠ م وهو نازل

$٤٠ن - ٥ن^{٢} = ٦٠$ ،ومنها $ن = ٦، ٢$ ، $ن = ٢$ تهمل

سرعة الجسم في اللحظة المطلوبة $= ٤٠ - ١٠ \times ٦ = -٢٠$ م / ث

السؤال السادس : $ف(ن) = ٣٠ن - ٥ن^{٢}$

أ) أقصى ارتفاع عندما السرعة = صفر

$ع(ن) = ٣٠ - ١٠ن = ٠$، ومنها $ن = ٣$ ث

أقصى ارتفاع $= ف(٣) = ٤٥م$

ب) عندما يكون الجسم على مستوى سطح العمارة تكون الإزاحة $= ٤٠م$

$٣٠ن - ٥ن^{٢} = ٤٠$ ومنها $ن = ٤، ٢ن = ٤$ ث ، ن$=٢$ تهمل

السرعة في تلك اللحظة(ن$=٤$) $= -١٠$ م / ث

تمارين (١-٦)صفحة ٤١

السؤال الأول :

أ) $\frac{ص}{س} = -٣(س^{٢} + س + ١)^{-٤} \times (٢س + ١)$

عندما س$= ١$: $\frac{ص}{س} = -٣(٣)^{-٤} \times (٢ + ١) = \frac{-١}{٩}$

ب) $ص = س^{٢} قا\frac{\pi}{س}$ ومنها $\frac{ص}{س} = س^{٢} قا\frac{\pi}{س} ظا\frac{\pi}{س} \times \frac{-\pi}{س^{٢}} + ٢س قا\frac{\pi}{س}$

عندما س=١ : $\frac{ص}{س} = -٢$

جـ) $ص = ٥ع^{٢} - ٧$، $\frac{ص}{ع} = ١٠ع$

$ع = \frac{١}{س^{٢}+١}$، $\frac{ع}{س} = \frac{-٢س}{(س^{٢}+١)^{٢}}$

$\frac{ص}{س} = \frac{ص}{ع} \times \frac{ع}{س} = ١٠ع \times \frac{-٢س}{(س^{٢}+١)^{٢}} = ١٠ \times \frac{١}{س^{٢}+١} \times \frac{-٢س}{(س^{٢}+١)^{٢}}$

عندما س=١ : $\frac{ص}{س} = \frac{-٥}{٢}$

د) $\frac{ص}{س} = قا^{٢}\frac{\pi}{س} \times \frac{-\pi}{س^{٢}} - ٢جتا\pi س \times جا\pi س \times \pi$

عندما س=١ : $\frac{ص}{س} = -\pi$

هـ) $\frac{ص}{س} = ٣(لـو_{هـ} س)^{٢} \times \frac{١}{س}$

عندما س=١ : $\frac{ص}{س} = ٠$

السؤال الثاني : $ن'(س) = \frac{\frac{٢س م'(س)}{م(س)} - ٢لـو_{هـ} م(س)}{٤س^{٢}}$

$ن'(١) = \frac{\frac{٢م'(١)}{م(١)} - ٢لـو_{هـ} م(١)}{٤} = -١ - \frac{١}{هـ}$

السؤال الثالث : أ) $ن'(س) = (٢س+١)هـ^{س^{٢}+س}$

ب) $ع'(س) = \frac{٣س^{٢}-٦س}{س^{٣}-٣س^{٢}}$

السؤال الرابع : $ن'(س) = ٢س^{٣}م'(س^{٢}+١) + ٢س م(س^{٢}+١)$

$ن''(س) = ٤س^{٤}م''(س^{٢}+١) + ٤س^{٢}م'(س^{٢}+١) + ٦س^{٢}م'(س^{٢}+١) + ٢م(س^{٢}+١)$

$ن''(١) = ٤$

شركة الراتب للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبدالرحمن شقير
00970568-952714

السؤال الخامس : $\frac{ص}{س} = ٣ن^{٢}(س)ن'(س) - ٣س^{٢}ن'(س^{٣})$

عندما س= ٢ : $\frac{ص}{س} = -٣٠$

السؤال السادس : $\frac{ص}{ع} = ٢ن + ٥$

عندما ن=١ : $\frac{ع}{س} = ٢$ أيضًا $\frac{ص}{ع} = ٢ \times ١ + ٥ = ٧$

عندما ن=١ : $\frac{ص}{س} = \frac{ص}{ع} \times \frac{ع}{س} = ٧ \times ٢ = ١٤$

السؤال السابع: $ن'(س) = ١ - \frac{١}{س^{٢}}$ ، $هـ'(س) = -جاس$

$(ن \circ هـ)'(س) = ن'(هـ(س)) \times هـ'(س)$

$= (ن \circ هـ)'(س) = ن'(جتاس) \times -جاس$

$= (ن \circ هـ)'(س) = (١ - \frac{١}{جتا^{٢}س}) \times -جاس$

$= \frac{جتا^{٢}س - ١}{جتا^{٢}س} \times -جاس = جا^{٣}س قا^{٢}س$

السؤال الثامن : أ) نفرض م = ٢ س فيكون

$$\text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{ظا(٢س + هـ) - ظا(٢س)}{هـ} = \text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{ظا(م + هـ) - ظا(م)}{هـ}$$

$= (ظام)' = قا^{٢}م = قا^{٢}٢س$

ب) $$\text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{ن(١ + ٣هـ) - ن(١ - ٣هـ)}{١٠هـ} = \text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{ن(١ + ٣هـ) - ن(١) - ن(١) - ن(١ - ٣هـ) + ن(١)}{١٠هـ}$$

$$= \text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{ن(١ + ٣هـ) - ن(١) - (ن(١) - ن(١ - ٣هـ))}{١٠هـ}$$

$$= \text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{ن(١ + ٣هـ) - ن(١)}{١٠هـ} - \text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{ن(١) - ن(١ - ٣هـ)}{١٠هـ}$$

$= \frac{٣}{١٠} \times ن'(١) - \frac{-٣}{١٠} ن'(١) = \frac{-٦}{٥}$ بالفرض لكل حالة

تمارين (١-٧) صفحة ٤٧

السؤال الأول :

أ) $٣س^{٢}+ص+س ص'+٤ص ص'=٠$ ومنها $ص'=\frac{-٣س^{٢}-ص}{س+٤ص}$

ب) $\frac{ص}{س}=\frac{١}{٥}((١-س^{٢})^{-\frac{٤}{٥}}\times-٢س=\frac{-٢}{٥}س(١-س^{٢})^{-\frac{٤}{٥}}$

ج) $ص'=جتا(س+ص)(١+ص')$ بالتبسيط ينتج أن:

$$ص'=جتا(س+ص)\times\frac{١}{١-جتا(س+ص)}$$

د) $\frac{-ص'}{ص^{٢}}-\frac{١}{س^{٢}}=٠$ ومنها $ص'=\frac{-ص^{٢}}{س^{٢}}$

السؤال الثاني : نجد نقط التقاطع $ص-٥+ص^{٢}=٢٥$ ومنها ص $=-٦$ ، ص $=٥$

عندما ص= -٦ لا يوجد س ، عندما ص=٥ فان س= ٠ ، ٣

$\frac{ص}{س}=٢س-٣$ ، ميل المماس عندما س=٣ يساوي ٣

ميل العمودي $\frac{-١}{٣}$ ومنها معادلة العمودي هي $ص-٥=\frac{-١}{٣}(س-٣)$

$ص=\frac{-١}{٣}س+٦$

ميل المماس عند ما س=٠ يساوي -٣

ميل العمودي $\frac{١}{٣}$ ومنها معادلة العمودي هي $ص-٥=\frac{١}{٣}(س)$ $=\frac{١}{٣}س+٥$

السؤال الثالث : بالاشتقاق الضمني ينتج أن:

$٢ف\frac{ف}{ن}=٢|ن$ ومنها $ع(ن)=\frac{ف}{ن}=\frac{|ن}{ف}=\frac{|ن}{\sqrt{|ن^{٢}+٢٤}}$

$ع(٢)=\frac{|٢}{\sqrt{|٢\times٢^{٢}+٢٤}}=١$ ومنها $|=٣$

السؤال الرابع : $ف=|جا(٢ن+م)$ ، $ع=٢|جتا(٢ن+م)$ ،

$ت=-٤|جا(٢ن+م)=-٤ف$

السؤال الخامس : نفرض نقطة التماس (س، ص) ، لاحظ ان النقطة المعطاة خارجة عن منحنى العلاقة

$٨س+٢ص ص'=٠$ ، ومنها $ص'=\frac{-٨س}{٢ص}=\frac{ص}{س+٢}$

شركة الرائد للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبدالرحمن فقيه
00970568-952714

ومنها ص^{٢} = −٤س^{٢} − ٨س = ٤ − ٤س^{٢}

س = −$\frac{١}{٢}$، ص = ± $\sqrt{٣}$ ، نقط التماس هي ($\frac{-١}{٢}$، $\sqrt{٣}$)،($\frac{-١}{٢}$، −$\sqrt{٣}$)

السؤال السادس: هـ^{س} + هـ^{ص} ص$'$ = − هـ$^{-س}$ − هـ$^{-ص}$ ص$'$

عند النقطة (−١،١) يكون $\frac{١}{هـ}$ + هـ ص$'$ = −هـ − هـ$^{-١}$ ص$'$

بالتبسيط ينتج أن : ص$'$ = −١

السؤال السابع : س^{٢} = لـو$_{هـ}$ س + لـو$_{هـ}$ ص بالاشتقاق ينتج أن:

٢س = $\frac{١}{س}$ + $\frac{ص'}{ص}$ ومنها ٢ = $\frac{١}{١}$ + $\frac{ص'}{هـ}$، ص$'$ = هـ

السؤال الثامن : $\frac{د ص}{د س}$ = م ن$^{م-١}$ هـ^{ن} ن$'$ + م ن$^{م-١}$ هـ^{ن} = م ن$^{م-١}$ هـ^{ن} (ن$'$ هـ + هـ$'$ ن)

بالضرب والقسمة على ن × هـ ينتج أن:

ص$'$ = م ن^{م} هـ^{م} × $\frac{ن'هـ + هـ'ن}{ن هـ}$ = م ص ($\frac{ن'}{ن}$ + $\frac{هـ'}{هـ}$)

ومنها $\frac{ص'}{ص}$ = م ($\frac{ن'}{ن}$ + $\frac{هـ'}{هـ}$).

تمارين عامة (الوحدة الاولى) صفحة ٤٨

السؤال الأول :

١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢
د	ب	ج	د	ج	د	د	ج	أ	ب	ب	د

الأسئلة المقالية:

السؤال الثاني :

$$\text{نهـــا}_{هـ\to 0}\frac{ن(١+٩هـ)-ن(١)}{\sqrt{١+هـ}-١}=\text{نهـــا}_{هـ\to 0}\frac{\frac{ن(١+٩هـ)-ن(١)}{هـ}}{\frac{\sqrt{١+هـ}-١}{هـ}}$$

$$=٩ن'(١)\times\text{نهـــا}_{هـ\to 0}\frac{هـ}{\sqrt{١+هـ}-١}\times\frac{\sqrt{١+هـ}+١}{\sqrt{١+هـ}+١}$$

(بالضرب بالمرافق والتبسيط) $=٩\times-٢\times٢=-٣٦$

السؤال الثالث:متوسط التغير للاقتران ص $=\frac{ن(١)-ن(٠)}{١-٠}=٢هـ^{٠}-هـ^{٠}=١$

السؤال الرابع :

$$\text{نهـــا}_{س\to ١}\frac{ن(س^{٢}+٢س-١)-ن(٢)}{س^{٢}-١}$$

$$=\text{نهـــا}_{س\to ١}\frac{(٢س+٢)ن'(س^{٢}+٢س-١)}{٢س}=\text{نهـــا}_{س\to ١}\frac{(س+١)ن'(س^{٢}+٢س-١)}{س}=٢ن'(٢)=-٢$$

يمكن الحل باستخدام الفرض والقسمة .

السؤال الخامس: أ) $\text{نهـــا}_{س\to 0}\frac{هـ^{٤س}-١}{ظاس}$ ، بالتعويض داخل النهاية يكون الجواب ÷ وبالتالي:

$$\text{نهـــا}_{س\to 0}\frac{هـ^{٤س}-١}{ظاس}=\text{نهـــا}_{س\to 0}\frac{٤هـ^{٤س}}{قا^{٢}س}=٤$$

ب) $\text{نهـــا}_{س\to 0}\frac{هـ^{س^{٢}}-هـ^{س}}{٢س}$ بالتعويض داخل النهاية يكون الجواب ÷ وبالتالي:

$$\text{نهـــا}_{س\to 0}\frac{هـ^{س^{٢}}-هـ^{س}}{٢س}=\text{نهـــا}_{س\to 0}\frac{٢سهـ^{س^{٢}}-هـ^{س}}{٢}=\frac{٠-١}{٢}=\frac{-١}{٢}$$

شركة الرائد للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبدالرحمن شلوف
00970568-952714

ج) $\lim_{س\to 0} \frac{جا٢س - جاس}{٢س}$ بالتعويض المباشر يكون الجواب ÷ وبالتالي:

$$\lim_{س\to 0} \frac{جا٢س - جاس}{٢س} = \lim_{س\to 0} \frac{٢جتا٢س - جتاس}{٢} = \frac{٢-١}{٢} = \frac{١}{٢}$$

د) $\lim_{س\to 0} \frac{١ - جتاس}{س\ جاس}$ بالتعويض المباشر يكون الجواب ÷ وبالتالي:

$$\lim_{س\to 0} \frac{١ - جتاس}{س\ جاس} = \lim_{س\to 0} \frac{جاس}{جاس + س\ جتاس}$$ وبالتعويض المباشر ينتج أيضا ÷ ونكمل تطبيق لوبيتال

$$\lim_{س\to 0} \frac{١-جتاس}{س\ جاس} = \lim_{س\to 0} \frac{جاس}{جاس + س\ جتاس} = \lim_{س\to 0} \frac{جتاس}{جتاس+جتاس - س\ جاس} = \frac{١}{٢}$$

السؤال السادس: متوسط التغير في الاقتران هـ(س)

$$= \frac{هـ(٣) - هـ(٠)}{٣} = \frac{ن(٢) + ٩ - ن(٠)}{٣} = \frac{٦ + ٩}{٣} = ٥$$

السؤال السابع : $\lim_{س\to ١} \frac{ن(س) - ٢}{س - ١} = \lim_{س\to ١} \frac{ن(س) - ن(١)}{س - ١} = ن'(١) = ٣$ ، $ن(١) = ٢$ لأن

ق(س) متصلاً عند س = ١

$$\lim_{س\to ١} \frac{س^{٣}\ ن(س) - ن(١)}{س - ١} = \lim_{س\to ١} \frac{س^{٣}\ ن'(س) + ٣س^{٢}\ ن(س)}{١}$$

$$= ن'(١) + ٣ن(١) = ٣ + ٣ \times ٢ = ٩$$

السؤال الثامن : نفرض أن زمن وصول كرة نزار $ن$ وزمن وصول كرة أحمد ن+١

$ف_{١}(ن+١) = ف_{٢}(ن)$ ومنها $٥(ن+١)^{٢} = ٥ن^{٢} + ١٠ن$

$ن = ١$ زمن وصول كرة نزار

سرعة ارتطام كرة نزار $= ف'(١) = ١٠ \times ١ + ١٥ = ٢٥$ م/ ث

السؤال التاسع : $ن'(س) = ٢$ جتاس ، $هـ'(س) = \frac{٣ - ٣س^{٢}}{(١ + س^{٢})^{٢}}$

$$(هـ \circ ن)'(\frac{\pi}{٦}) = هـ'(ن(\frac{\pi}{٦})) \times ن'(\frac{\pi}{٦}) = هـ'(\frac{١}{٢}) \times (\frac{٣\sqrt{}}{٢}) = ٠$$

ومنها $هـ'(\frac{١}{٢}) = ٠$ ومنها $هـ'(\frac{١}{٢}) = ٣ - ٣(\frac{١}{٢})^{٢} = ٠$ ومنها $٢ = \pm ٢$

السؤال العاشر : لاحظ أن: ق(س) منفصل عدما س= ١ ، س=٢

$$ن'(س) = \begin{cases} ٢س ، & س \in]١،٢[\\ ٢س ، & س \in]٠،١[\\ \frac{-٢}{(س+١)^{٢}} ، & س \in]٢،\infty[\end{cases}$$

عند س = ٠ ، ١ ، ٢ غير موجودة .

السؤال الحادي عشر : $ف = ٢(هـ^{٢ن} - هـ^{-٢ن})$

$ع = ٢(٢هـ^{٢ن} + ٢هـ^{-٢ن})$ ، $ت = ٤(٢هـ^{٢ن} - ٢هـ^{-٢ن}) = ٤ف$

السؤال الثاني عشر : $ن'(س) = ٣جا^{٢}س جتاس + ٣جتا^{٢}س جاس$

$ن''(س) = -٣جا^{٣}س + ٦جاس جتا^{٢}س + ٣جتا^{٣}س - ٦جتا س جا^{٢}س$

$ن''(س) = -٣جا^{٣}\frac{\pi}{٤} + ٦جا\frac{\pi}{٤} جتا^{٢}\frac{\pi}{٤} + ٣جتا^{٣}\frac{\pi}{٤} - ٦جتا\frac{\pi}{٤} جا^{٢}\frac{\pi}{٤}$

$ن''(\frac{\pi}{٤}) = -٣ \times (\frac{١}{\sqrt{٢}})^{٣} + ٦ \times (\frac{١}{\sqrt{٢}})^{٢} + ٣ \times \frac{١}{\sqrt{٢}} - ٦ \times \frac{١}{\sqrt{٢}} = ٠$

السؤال الثالث عشر : أ) $ن'(س) = ٣(س-٢)^{٢}(٣+٢س)^{٤} + ٨(س-٢)^{٣}(٣+٢س)^{٣}$

$ن'(س) = (س-٢)^{٢}(٣+٢س)^{٣}(٨(س-٢)+٣(٣+٢س)) = ٠$

$ن'(س) = (س-٢)^{٢}(٣+٢س)^{٣}(١٤س-٧) = ٠$

$س = ٢ ، \frac{١}{٢} ، \frac{-٣}{٢}$ ، $س = \frac{-٣}{٢}$ تهمل

ب) $ن'(س) = جتاس(١+جتاس) - جا^{٢}س = ٢جتا^{٢}س + جتاس - ١ = ٠$

وبحل المعادلة ينتج أن القيمة المطلوبة هي $س = \frac{\pi}{٣}$

السؤال الرابع عشر : أ) $\frac{ص}{س} = \frac{(هـ^{٦س} + ٦س هـ^{٦س}) جاس - س هـ^{٦س} جتاس}{جا^{٢}س}$

ب) $\frac{ص}{س} = \frac{(١+لـو_{هـ}س) جتاس + س جاس لـو_{هـ}س}{جتا^{٢}س}$

السؤال الخامس عشر : $ف(ن) = ١(جتا٢ن + جا٢ن) = ٣$

$ع = ف'(ن) = ١(٢جتا٢ن - ٢جا٢ن)$

$ت = ف''(ن) = ١(-٤جتا٢ن - ٤جا٢ن)$

$ت = ف''(ن) = -١٤(جتا٢ن + جا٢ن) = -٤ \times ٣ = -١٢$ م/ث٢

شركة الراتب للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبدالرحمن شقير
00970568-952714

السؤال السادس عشر : $ن'(س) = \frac{-٢ - \frac{٥}{٢}}{١ - ٢} = \frac{١}{٢}$

$= ١ - \frac{١}{س^{٢}}$ ، $\frac{١}{٢} = \pm \sqrt{٢}$ = س

النقاط هي $(\sqrt{٢}، ن(\sqrt{٢}))$ ، $(-\sqrt{٢}، ن(-\sqrt{٢}))$.

حلول الوحدة الثانية/ تطبيقات التفاضل

تمارين (٢-١) صفحة ٥٩

السؤال الأول :

أ) $ن(س) = \sqrt{٤س - س^{٢}}$ **على الفترة** $[٠، ٤]$

نبحث في شروط نظرية رول على ق(س) في $[٠، ٤]$

ق(س) متصل على $[٠، ٤]$

$ن'(س) = \frac{١}{٢}(٤س - س^{٢})^{-\frac{١}{٢}} \times (٤ - ٢س)$ ، س $\in]٠، ٤[$

$\leftarrow ن'(س) = \frac{-٢ - س}{\sqrt{٤س - س^{٢}}}$ ، ق قابل للاشتقاق في $]٠، ٤[$

ق(٠)= صفر ، ق(٤) = صفر $\Leftarrow$ **ق(٠) = ق(٤)**

تحققت شروط نظرية رول ومنها يوجد جـ $\in]٠، ٤[$: $ن'(جـ) = ٠$

$\Leftarrow ٠ = \frac{-٢ - جـ}{\sqrt{٤جـ - جـ^{٢}}}$ $\in]٠، ٤[$ جـ $= ٢$

ب) $ن(س) = س^{٢} - ٢س - ٣$ **على الفترة** $[-١، ٣]$

الحل: $ن(س) = س^{٢} - ٢س - ٣$ ، س $\in [-١، ٣]$

ق(س) متصل على $[-١، ٣]$ **وقابل للاشتقاق على** $]-١، ٣[$ **لأنه كثير حدود**

ق(-١) = ق(٣) =صفر

إذن تحققت شروط نظرية رول على ق(س) في $[-١، ٣]$ **ومنها يوجد جـ** $\in]-١، ٣[$: $ن'(جـ) = ٠$

$ن'(س) = ٢س - ٢$

$\Leftarrow ٠ = ٢جـ + ٢-$ جـ $= ١ \in]-١، ٣[$

شركة الرائد للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبدالرحمن شقير
00970568-952714

ج) $ن(س) = لـو_{هـ}\left(س + \frac{١}{س}\right)$، $س \in \left[\frac{١}{٢}، ٢\right]$

الحل: نبحث في شروط نظرية رول على الاقتران ق(س) في الفترة $\left[\frac{١}{٢}، ٢\right]$

ق(س) متصل في $\left[\frac{١}{٢}، ٢\right]$ لانه اقتران لوغريتمي والفترة ضمن مجاله

$$ن'(س) = \frac{١}{س + \frac{١}{س}} \times \left(١ + \frac{-١}{س^{٢}}\right)، \quad س \in \left[\frac{١}{٢}، ٢\right]$$

ق(س) قابل للاشتقاق في الفترة $\left]\frac{١}{٢}، ٢\right[$

$$ن\left(\frac{١}{٢}\right) = لـو_{هـ}\left(\frac{١}{٢} + ٢\right) = لـو_{هـ}\left(\frac{٥}{٢}\right)$$

$$ن(٢) = لـو_{هـ}\left(٢ + \frac{١}{٢}\right) = لـو_{هـ}\left(\frac{٥}{٢}\right)$$

إذن $ن\left(\frac{١}{٢}\right) = ن(٢)$

تحققت شروط نظرية رول على الاقتران ق(س) في الفترة $\left[\frac{١}{٢}، ٢\right]$

إذن $\exists$ جـ $\in \left]\frac{١}{٢}، ٢\right[$: $ن'(جـ) = ٠$

$$\frac{١}{جـ + \frac{١}{جـ}} \times \left(١ + \frac{-١}{جـ^{٢}}\right) = ٠$$

$\left(\frac{جـ^{٢} - ١}{جـ^{٢}}\right) = ٠$ وعندما $\left(\frac{جـ^{٢} - ١}{(جـ)^{٢}}\right) = ٠$ إذن $جـ^{٢} - ١ =$ صفر ومنها جـ$= ١ \notin \left]\frac{١}{٢}، ٢\right[$

لاحظ ان جـ $= -١ \notin \left]\frac{١}{٢}، ٢\right[$ (تهمل)

د) $ن(س) = جا٢س + ٢جاس$، $س \in [٠، \frac{\pi}{٢}]$

الحل: نبحث في شروط نظرية رول على ق(س) في $[٠، \frac{\pi}{٢}]$ ، ق(س) متصل على $[٠، \frac{\pi}{٢}]$

ق(س) قابل للاشتقاق على الفترة $]٠، \frac{\pi}{٢}[$ بحيث $ن'(س) = ٢جتا٢س + ٢جتاس$

ق(٠) = صفر ، $ن(\frac{\pi}{٢}) = ٢ \Leftarrow$ ق(٠) $\neq ن(\frac{\pi}{٢})$

شركة الراتب للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبدالرحمن شقير
00970568-952714

إذن لم تتحقق شروط نظرية رول ⇐ قد يوجد ج

ن ′(جـ)= صفر ⇐٢جتا٢جـ + ٢جتاجـ = ٠

جتا٢جـ+جتاجـ = ٠ ⇐ ٢جتا٢ جـ+جتاجـ − ١ = ٠

$$\text{ومنها } \cos\theta = \frac{1}{2} \Leftarrow \cos\theta + 1)(2\cos\theta - 1) = 0 \Leftarrow \text{ومنها } \theta = \frac{\pi}{3} \in [0, \frac{\pi}{2}[$$

او $(\cos\theta + 1) = 0 \Leftarrow \cos\theta = -1 \Leftarrow \theta = \pi$ (تهمل)

السؤال الثاني:

أ) ن(س) = س ٣ − س − ١ ، س ∈ $[-1, 2]$

ن(س) متصل على $[-1, 2]$ ، كثير حدود

ن′(س) = ٣س ٢ − ١ ، س ∈ $[-1, 2]$ ، ن(س) قابل للاشتقاق على الفترة

إذن تحققت شروط نظرية القيمة المتوسطة على ق(س) في الفترة $[-1, 2]$

$$\Leftarrow \exists \theta \in]-1, 2[: \text{ن}'(\theta) = \frac{\text{ن}(2) - \text{ن}(-1)}{2 - (-1)}$$

$$\theta^2 3 = \frac{6}{3} = \frac{5 - (-1)}{3} = 2$$

$$\theta^2 3 = 3 \leftarrow \theta^2 = 1 \leftarrow \theta = 1 \in]-1, 2[\text{ ، } \theta = -1 \text{ (تهمل)}$$

ب) ن(س) = $\frac{4}{س + 2}$ ، س ∈ $[-1, 2]$

نبحث في شروط نظرية القيمة المتوسطة على ق(س) في $[-1, 2]$

ق(س) متصل على $[-1, 2]$

$$\text{ن}'(س) = \frac{4 \times -1}{(س + 2)^2} \text{ ، } س \in]-1, 2[$$

ق قابل للاشتقاق في $]-1, 2[$

إذن تحققت شروط نظرية القيمة المتوسطة $\Leftarrow \exists \theta \in]-1, 2[$ بحيث

$$\text{ن}'(\theta) = \frac{\text{ن}(2) - \text{ن}(-1)}{2 - (-1)} = \frac{-4}{(\theta + 2)^2} = \frac{4 - 1}{3}$$

$$\frac{-4}{(\theta + 2)^2} = \frac{-3}{3} \Leftarrow \frac{-4}{(\theta + 2)^2} = -1 \quad \text{ومنها } (\theta + 2)^2 = 4$$

$\theta + 2 = \pm 2 \Leftarrow$ جـ=صفر أو جـ= -٤ ترفض ومنها قيمة ج المطلوبة هي الصفر

شركة الرائد للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبدالرحمن شقير
00970568-952714

ج) $ن(س) = \sqrt{س} + ٢س$ ، $س \in [٠، ٩]$

الحل : نبحث في شروط نظرية القيمة المتوسطة على ق(س) في [٠، ٩]

ق(س) متصل في [٠، ٩] ، وقابل للاشتقاق في]٠، ٩[حيث

$$ن'(س) = \frac{١}{٢\sqrt{س}} + ٢$$

إذن تحققت شروط نظرية القيمة المتوسطة على ق(س) في [٠، ٩]

$$\Leftarrow E \, جـ \in]٠، ٩[: ن'(جـ) = \frac{ن(٩) - ن(٤)}{٩ - ٤}$$

$$\frac{١}{٢\sqrt{جـ}} + ٢ = \frac{٢١ - ١٠}{٥}$$

$$\frac{١}{٢\sqrt{جـ}} + ٢ = \frac{١١}{٥} \Leftarrow \frac{١}{٢\sqrt{جـ}} = \frac{١}{٥}$$

$$\Leftarrow ٢\sqrt{جـ} = ٥ \Leftarrow جـ = \frac{٢٥}{٤} \in]٠، ٩[$$

السؤال الثالث:

$$ن(س) = \begin{cases} أ س^{٢} + ٢س & ، \ ٠ \leq س \leq ٢ \\ س^{٣} - ب س + ١٢ & ، \ ٢ < س \leq ٣ \end{cases}$$ **يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة**

إذن ق(س) متصل على [٠، ٣] وقابل للاشتقاق على]٠، ٣[

ق متصل على [٠، ٣] $\Leftarrow$ $\lim_{س \to ٢^{-}} ن(س) = \lim_{س \to ٢^{+}} ن(س)$

$$\Leftarrow أ٤ + ٤ = ٨ - ٢ب + ١٢ \Leftarrow أ٤ + ٢ب = ١٦$$ (١)

$$٢أ + ب = ٨ \quad \text{-------}$$

$$ن'(س) = \begin{cases} ٢أس + ٢ & ، \ ٠ < س \leq ٢ \\ ٣س^{٢} - ب & ، \ ٢ < س < ٣ \end{cases}$$

$$ن'(٢^{+}) = ن'(٢^{-}) \Leftarrow أ٤ + ٢ = ١٢ - ب$$

$$أ٤ + ب = ١٠ \quad \text{-------} \quad (٢)$$ **وبحل المعادلتين (١) ، (٢)**

$$أ٤ + ب = ١٠$$

$$٢أ + ب = ٨$$

$$٢أ = ٢ \Leftarrow أ = ١ \Leftarrow ٢ \times ١ + ب = ٨ \Leftarrow ب = ٦$$

شركة الراتب للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبدالرحمن شقير
00970568-952714

لإيجاد قيمة جـ : $\text{ن}'(\text{جـ}) = \frac{\text{ن}(٣) - \text{ن}(٠)}{٣ - ٠} = \frac{٢١ - ٠}{٣} = ٧$

عندما $٠ < \text{جـ} \geq ٢$ ، $٢\text{جـ} + ٢ = ٧ \Leftarrow ٢\text{جـ} = ٥ \Leftarrow \text{جـ} = \frac{٥}{٢}$ ترفض

عندما $٢ < \text{جـ} < ٣$ ، $٣\text{جـ}^{٢} - ٦ = ٧ \Leftarrow ٣\text{جـ}^{٢} = ١٣ \Leftarrow \text{جـ} = \left|\frac{\sqrt{١٣}}{٣}\right|$ ∈ $]٣،٠[$

السؤال الرابع:

$\text{ن}(\text{س}) = \frac{١}{\text{س}}$ ، $\text{س} \in [\text{ا}،\text{ب}]$ ، $\text{س} > ٠$ أثبت باستخدام نظرية القيم المتوسطة ان $\text{جـ}^{٢} = \text{ا ب}$

البرهان : نبحث في شروط نظرية القيمة المتوسطة على ق(س) في $[\text{ا}،\text{ب}]$

ق(س) متصل لأن $\text{س} > ٠$ ، $\forall \text{س} \in [\text{ا}،\text{ب}]$

$\text{ن}'(\text{س}) = \frac{-١}{\text{س}^{٢}}$ ← ن قابل للاشتقاق على $]\text{ا}،\text{ب}[$ لأن $\text{س} > ٠$

إذن تحققت شروط نظرية القيمة المتوسطة ومنها $\exists \text{جـ} \in]\text{ا}،\text{ب}[$ بحيث $\text{ن}'(\text{جـ}) = \frac{\text{ن}(\text{ب}) - \text{ن}(\text{ا})}{\text{ب} - \text{ا}}$

$$\frac{-١}{\text{جـ}^{٢}} = \frac{\frac{١}{\text{ب}} - \frac{١}{\text{ا}}}{\text{ب} - \text{ا}} \Leftarrow \frac{-١}{\text{جـ}^{٢}} = \frac{\text{ا} - \text{ب}}{\text{ا ب}(\text{ب} - \text{ا})}$$

$$\frac{-١}{\text{جـ}^{٢}} = \frac{-١}{\text{ا ب}} \Leftarrow \text{جـ}^{٢} = \text{ا ب}$$ وهو المطلوب

السؤال الخامس:

$\text{ع}(\text{س}) = \text{ن} \circ \text{هـ}(\text{س})$ ، $\text{س} \in [\text{ا}،\text{ب}]$، ن، هـ متصلين على الفترة $[\text{ا}،\text{ب}]$وقابلين للاشتقاق على الفترة $]\text{ا}،\text{ب}[$

$\text{هـ}(\text{ا}) = \text{ب}$،$\text{هـ}(\text{ب}) = \text{ا}$ أثبت أنه $\exists \text{جـ} \in]\text{ا}،\text{ب}[: \text{ع}'(\text{ا}) - \text{ع}(\text{ب}) = \text{ن}'(\text{جـ})(\text{ب} - \text{ا})$

البرهان:

نبحث في شروط نظرية القيمة المتوسطة على ق(س) في $[\text{ا}،\text{ب}]$

ق(س) متصل على $[\text{ا}،\text{ب}]$ وقابل للاشتقاق على $]\text{ا}،\text{ب}[$ من المعطيات

تحققت شروط نظرية القيمة المتوسطة

$$\Leftarrow \exists \text{جـ} \in]\text{ا}،\text{ب}[: \text{ن}'(\text{جـ}) = \frac{\text{ن}(\text{ب}) - \text{ن}(\text{ا})}{\text{ب} - \text{ا}}$$

لكن $\text{ب} = \text{هـ}(\text{ا})$ ، $\text{ا} = \text{هـ}(\text{ب})$ إذن $\text{ن}'(\text{جـ}) = \frac{\text{ن}(\text{هـ}(\text{ا})) - \text{ن}(\text{هـ}(\text{ب}))}{\text{ب} - \text{ا}}$

شركة الراتب للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبدالرحمن شقير
00970568-952714

$$ن'(جـ) = \frac{ع(أ) - ع(ب)}{ب - أ}$$

$ن'(جـ)(ب - أ) = ع(أ) - ع(ب)$ وهو المطلوب

السؤال السادس:

البرهان : $ن(س) = س جتاس$ ، $س \in \left[0، \frac{\pi}{2}\right]$

$ن(س)$ متصل على $\left[0، \frac{\pi}{2}\right]$ وقابل للاشتقاق على $\left]0، \frac{\pi}{2}\right[$

ق(٠) =صفر ، $ن(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} \times ٠ = ٠ \Leftarrow ن(٠) = ن(\frac{\pi}{2})$

إذن تحققت شروط نظرية رول ومنها $\Leftarrow$ $\exists جـ \in \left]0، \frac{\pi}{2}\right[: ن'(جـ) = ٠$

$ن'(س) = س \times -جاس + جتاس \times ١$

$ن'(س) = جتاس - س جاس$ ومنه $ن'(جـ) = جتا جـ - جـ جاجـ$

وبالتالي ظتا جـ =جـ القيمة التي تعينها النظرية هي عندما ظتا س = س

تمارين (٢-٢) صفحة ٦٤

السؤال الاول:

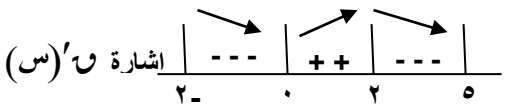
أ) ق(س)= ٣س^{٢}- س^{٣} ، س $\in$ [-٢، ٥]

الحل : ق(س) متصل على [-٢، ٥]

$ن'(س) = ٦س - ٣س^{٢}$

صفر=٣س (٢- س)

س= صفر أو س =٢

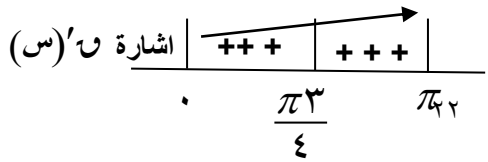


من اشارة ن ´ (س) فإن ق(س) متناقص في [-٢، ٠] ، [٢، ٥] ومتزايد في [٠، ٢]

ب) $ن'(س) = س + جا^{٢}س$ ، $س \in [0، \pi]$

الحل: ن(س) متصل في $[0، \pi]$

$ن'(س) = ١ + ٢جاس جتاس = ١ + جا٢س$ ، $س \in]0، \pi[$



$$-١ = \text{جا}٢س \Leftarrow س = \frac{\pi ٣}{٤}$$

من اشارة ن ´(س)فإن

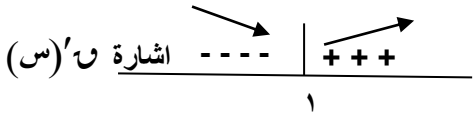
ن(س) متزايد في $[\pi ،٠]$

ج) $ن(س) = \sqrt{س^{٢} - ٢س + ١}$

الحل: $ن(س) = \sqrt{(س-١)^{٢}} = |س-١|$ ، س ∈ ح

$$ن(س) = \begin{cases} س - ١ & ، س \geq ١ \\ -س + ١ & ، س < ١ \end{cases}$$ متصل على ح

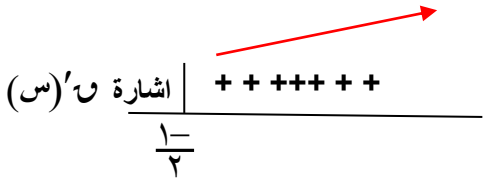
$$ن´(س) = \begin{cases} ١ & ، س > ١ \\ -١ & ، س < ١ \end{cases}$$



من اشارة ن ´(س) فإن ن(س) متناقص في $]-\infty ،١]$ **ومتزايد في** $[١ ،\infty[$

السؤال الثاني:

الحل: $ن´(س) = -٢ + \frac{١}{س+١}$



$$ن´(س) = -٢ + \frac{١}{س+١} = ٠$$

ومنها $س = -\frac{١}{٢}$

ومنها ق متزايد على الفترة $]-\frac{١}{٢} ،\infty[$ **وبالتالي متزايد على** $ح^{+}$

السؤال الثالث:

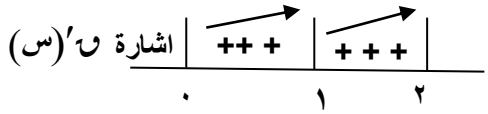
$$ن(س) = \begin{cases} س^{٣} & ، ١ > س \geq ٠ \\ س^{٢} - ٢ & ، ٢ \geq س \geq ١ \end{cases}$$

لاحظ ان ق غير متصل عند س=١ لان

نهـــا ن(س) = ١ ، نهـــا ن(س) = ١ - ٢ = -١ ، النهاية غير موجودة

$س \to ١^{-}$ ، $س \to ١^{+}$

وبالتالي ن ´(١) غير موجودة



$$ن´(س) = \begin{cases} ٣س^{٢} & ، ١ > س > ٠ \\ ٢س & ، ٢ > س > ١ \end{cases}$$

ن ´(س) ≠ ٠ لجميع قيم س في المجال ، ن ´(س) موجبة دائما

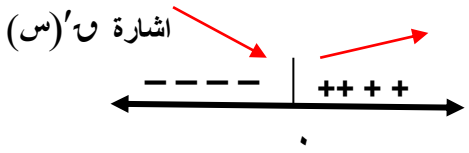
ن(س) متزايد في $]٢ ،١]$ **، و متزايد في** $]١ ،٠[$

السؤال الرابع :

$ن'(س) = هـ(س)$ ، $هـ'(س) = -ن(س)$ ، $ك(س) = ن^{٢}(س) + هـ^{٢}(س) + س^{٢}$

الحل : $ك'(س) = ٢ن(س)ن'(س) + ٢هـ(س)هـ'(س) + ٢س$

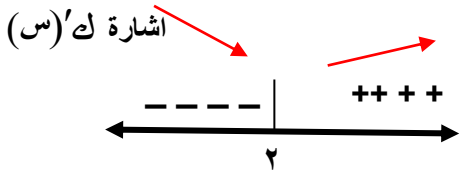
$= ٢ن(س) \times هـ(س) - ٢هـ(س) \times ن(س) + ٢س = ٠ + ٢س$



$ك'(س) = ٢س$

ك(س)متزايد في $[٠ ، \infty[$ ك(س) متناقص في $]-\infty ، ٠]$

السؤال الخامس : $ك(س) = هـ(س^{٢} - ٤س)$



ك متصل على ح لانه كثير حدود

$ك`(س) = هـ`(س^{٢} - ٤س) \times (٢س - ٤)$

$ك`(س) = ٠ \Leftarrow (٢س - ٤) = ٠ \Leftarrow س = ٢$ **لان** $ن'(س) \neq ٠$ **كون ق متزايد**

ك(س) متزايد $[٢ ، \infty[$ ، ك(س)متناقص عندما $]-\infty ، ٢]$

السؤال السادس :

الحل : ن(س)،هـ(س) كثيرا حدود في $[٤٠ ،]$ ← متصلين في$[٤٠ ،]$ وقابلين للاشتقاق في $]٤٠ ،[$

ن(س) متناقص في مجاله اذن $ن'(س) < ٠ ، \forall س \in]٤٠ ،[$

يقع منحنى ن(س) في الربع الرابع اذن $ن(س) > ٠ ، \forall س \in [٤٠ ،]$

هـ(س) متزايد في مجاله اذن $هـ'(س) > ٠ ، \forall س \in]٤٠ ،[$

يقع منحنى هـ(س) في الربع الاول اذن $هـ(س) > ٠ ، \forall س \in [٤٠ ،]$

لكن $(ن(س) \times هـ(س))' = ن(س) \times هـ'(س) + ن'(س) \times هـ(س)$

اشارة $(ن(س) \times هـ(س))'$ = سالب × موجب + موجب × سالب = سالب

اذن $ن(س) \times هـ(س)$ متناقص في $[٤٠ ،]$

السؤال السابع :

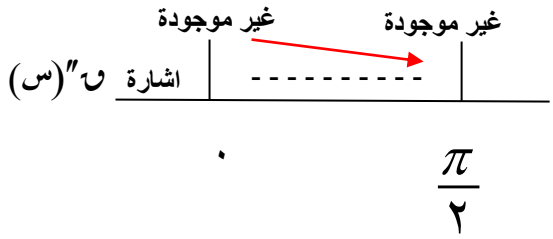
$$ن(س) = جاس + جتاس \text{ ، } س \in \left[0 ، \frac{\pi}{2}\right]$$

$$ن'(س) = جتاس - جاس \text{ ، } س \in \left[0 ، \frac{\pi}{2}\right[$$

ولمعرفة مجالات التزايد والتناقص للاقتران ن'(س) نبحث في اشارة ن"(س)

$$ن''(س) = -جاس - جتاس = 0 \quad \text{أي أن}$$

$$ظاس = -1 \leftarrow س = \frac{3\pi}{4} \notin \left[0 ، \frac{\pi}{2}\right[$$



ن(س) متناقص في $\left[0 ، \frac{\pi}{2}\right[$

تمارين (٢-٣) القيم القصوى صفحة ٧٤

السؤال الاول :

أ) $ن(س) = \frac{1}{3}س^3 - س^2 + \frac{1}{3} \text{ ، } س \in [-2 ، 3]$

الحل: $ن'(س) = س^2 - 2س \text{ ، } س \in [-2 ، 3]$

صفر $= س(س-2) \leftarrow س = 0$ أو $س = 2$

النقاط الحرجة هي

$$(-2 ، ن(-2)) \text{ ، } (3 ، ن(3)) \text{ ، } (0 ، ن(0)) \text{ ، } (2 ، ن(2))$$

$$\left(-2 ، \frac{-19}{3}\right) \text{ ، } \left(3 ، \frac{1}{3}\right) \text{ ، } \left(0 ، \frac{1}{3}\right) \text{ ، } (-2 ، 1)$$

ب) $ن(س) = س^{\frac{2}{3}} \text{ ، } س \in [-8 ، 8]$

$ن'(س) = \frac{2}{3}س^{\frac{-1}{3}} \text{ ، } س \neq 0 \leftarrow س \in [-8 ، 8] - \{0\}$

شركة الراتب للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبدالرحمن شقير
00970568-952714

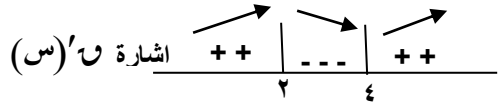
$$ن'(س) = \frac{٢}{٣ \times \sqrt[٣]{س}}\ ،س \neq ٠$$

النقط الحرجة هي (٠،٠) ، (-٨ ،٤) ، (٨، ٤)

السؤال الثاني :

أ) $ن(س) = س^{٣} - ٩س^{٢} + ٢٤س\ ،س \in ح$

الحل: $ن'(س) = ٣س^{٢} - ١٨س + ٢٤$



$$صفر = ٣(س^{٢} - ٦س + ٨) = ٣(س - ٤)(س - ٢)$$

أي أن : س=٤ أو س=٢

القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س) هي :

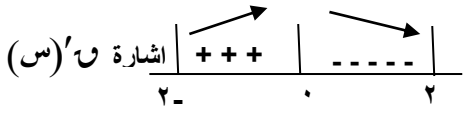
ق(٢)= ٨-٩×٤+٢٤×٢=٨-٣٦+٤٨=٢٠ قيمة عظمى محلية

ق(٤)=٦٤-٩×١٦+٢٤×٤=٦٤-١٤٤+٩٦=١٦ قيمة صغرى محلية

ب) $ن(س) = \sqrt{٤ - س^{٢}}$ **المجال** $٤ - س^{٢} \geq ٠ \leftarrow س \in [-٢،٢]$

$$ن'(س) = \frac{١}{٢}(٤ - س^{٢})^{-\frac{١}{٢}} \times -٢س = \frac{-س}{\sqrt{٤ - س^{٢}}}\ ،س \in [-٢،٢]$$

ن'(س) =صفر ← س= صفر



ن(-٢) = ن(٢)= صفر قيمة صغرى محلية

ن(٠) = ٢ قيمة عظمى محلية

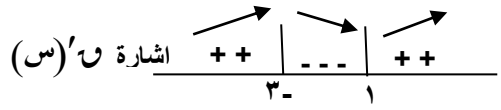
ج) $ن(س) = (س^{٢} - ٣)هـ^{س}\ ،س \in ع$

الحل: $ن'(س) = (س^{٢} - ٣)هـ^{س} + ٢س هـ^{س}\ ،س \in ع$

$$(س^{٢} - ٣)هـ^{س} + ٢س هـ^{س} = ٠ \leftarrow هـ^{س}(س^{٢} + ٢س - ٣) = ٠$$

$$\leftarrow هـ^{س}(س + ٣)(س - ١) = ٠ \leftarrow س = -٣\ ،س = ١$$

القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س) هي



ن(-٣) = ٦هـ^{-٣} قيمة عظمى محلية

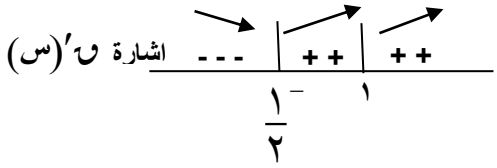
ن(١) = -٢هـ قيمة صغرى محلية

د) $ن(س) = \frac{س^{٣} - ١}{س - ١}$ ، $س \neq ١$

الحل: $ن(س) = س^{٢} + س + ١$ ، $س \neq ١$

$ن'(س) = ٢س + ١$

صفر = $ن'(س) \leftarrow س = -\frac{١}{٢}$

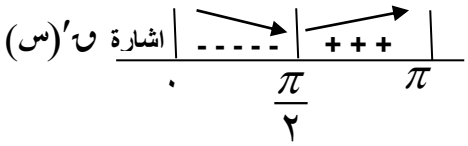


القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س) هي

$ن(-\frac{١}{٢}) = \frac{٣}{٤} = ١ + \frac{١}{٢} - \frac{١}{٤}$ قيمة صغرى محلية

هـ) $ن(س) = جتا^{٢}س - جا^{٢}س$ ، $س \in [٠، \pi]$

الحل: $ن(س) = جتا٢س$ ، $س \in [٠، \pi]$



$ن'(س) = -جا٢س \times ٢ = -٢جا٢س$ ، $س \in [٠، \pi]$

$ن'(س) = ٠ \leftarrow -٢جا٢س = ٠ \Leftarrow ٢س = ٠ \leftarrow س = ٠ \notin [٠، \pi]$

$٢س = \pi \leftarrow س = \frac{\pi}{٢}$ أو $٢س = ٢\pi \leftarrow س = \pi \notin [٠، \pi]$

القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س) هي :

ق(٠) = ١ قيمة عظمى محلية

$ن(\pi) = ١$ قيمة عظمى محلية

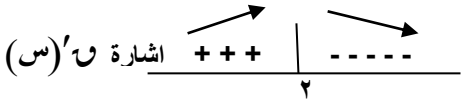
$ن(\frac{\pi}{٢}) = -١$ قيمة صغرى محلية

و) $ن(س) = هـ^{-(س-٢)^{٢}}$ ، $س \in ع$

الحل: $ن'(س) = هـ^{-(س-٢)^{٢}} \times -٢(س-٢) \times ١ = -٢(س-٢) هـ^{-(س-٢)^{٢}}$

$ن'(س) = ٠ \leftarrow س = ٢$

ق(٢) = ١ قيمة عظمى محلية



السؤال الثالث:

أ) $ن(س) = \begin{cases} س^{٣} & ، \ ٠ \leq س \leq ٢ \\ س^{٢} + ٤ & ، \ ٢ < س \leq ٣ \end{cases}$ ، $س \in [٣، ٠]$

الحل: $نهـا_{س \to ٢^{-}} ن(س) = نهـا_{س \to ٢^{+}} ن(س) = ن(٢) = ٨$

إذن ق متصل في [٠، ٣]

$ن'(س) = \begin{cases} ٣س^{٢} & ، \ ٠ < س < ٢ \\ ٢س & ، \ ٢ < س < ٣ \end{cases}$

ن′(س) غير موجودة عند س= ٠ ، ٢ ، ٣

ن′(س) = ٠

عندما ٠ < س < ٢ ⇐ ٣س^{٢} = ٠ ← س = ٠ ترفض

عندما ٢ < س < ٣ ← ٣س٢ = ٠ ← س = ٠ ترفض

القيم القصوى المحلية ق(٠) = صفر ، ق(٢) = ٨ ، ق(٣) = ١٣

ق(٠) = صفر قيمة صغرى مطلقة (اصغر قيمة) ، ق(٣)=١٣ قيمة عظمى مطلقة (اكبر قيمة)

ب) ن(س) = هـ^{س} - هـ س ، س ∈ [٠،٣]

الحل: ق متصل (حاصل طرح متصلين)

ن′(س) = هـ^{س} - هـ ، س ∈]٠،٣[← ٠ = هـ^{س} - هـ ← س = ١

القيم القصوى المحلية ق(٠) = ١ ، ق(١) = ٠ ، ق(٣) = هـ^{٣} - ٣هـ

ق(١) = صفر قيمة صغرى مطلقة (اصغر قيمة)

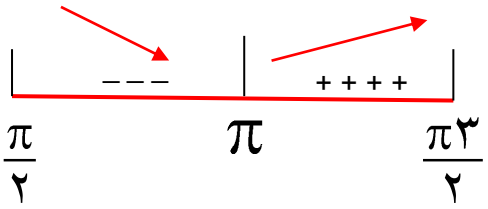
ق(٣)= هـ^{٣} - ٣هـ قيمة عظمى مطلقة (اكبر قيمة) حسب نظرية القيم القصوى

ج) ه(س) =جتاس-$\frac{١}{٣}$جتا^{٣} س ، س ∈ $\left[\frac{\pi}{٢}، \frac{\pi ٣}{٢}\right]$ ، ق متصل (حاصل طرح متصلين)

ه ′(س) =-جاس+جتا^{٢} س جاس = - جا^{٣} س

ه ′(س) = - جا^{٣} س = ٠ ⇐ جاس = ٠ ⇐ س = π

ه($\frac{\pi}{٢}$) =جتا$\left(\frac{\pi}{٢}\right)$ - $\frac{١}{٣}$جتا$^{٣}\left(\frac{\pi}{٢}\right)$ = ٠ عظمى مطلقة



ه($\frac{\pi ٣}{٢}$) =جتا$\left(\frac{\pi ٣}{٢}\right)$ - $\frac{١}{٣}$جتا$^{٣}\left(\frac{\pi ٣}{٢}\right)$ = ٠ عظمى مطلقة

ه(π) =جتا(π) - $\frac{١}{٣}$جتا^{٣}(π) = $\frac{-٢}{٣}$ صغرى مطلقة

السؤال الرابع :

ن(س) = أس^{٣} + بس^{٢} + ٩س + ١ ، ق(١) عظمى محلية ، ق(٣) صغرى محلية

الحل: للاقتران نقط حرجة عند س=١ ، س=٣ ⇐ ن′(١) = ن′(٣) = ٠

ن′(س) = ٣أس^{٢} + ٢بس + ٩

شركة الرائد للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبدالرحمن شقير
00970568-952714

ن′(١) = ١٣ أ + ٢ب + ٩ ⇐ ١٣ أ + ٢ب + ٩ = صفر --------- (١)

ن′(٣) = ١٣ أ × ٣ ٢ + ٢ب × ٣ + ٩

٠ = ١٢٧ أ + ٦ب + ٩

٠ = ١٩ أ + ٢ب + ٣ ---------- (٢) وبحل المعادلتين (١) ، (٢) نحصل على:

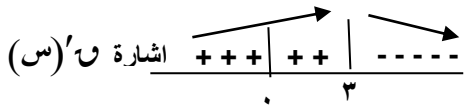
أ = ١ ⇐ ٠ = ١٦ أ + ٦ ← ب = − ٦

السؤال الخامس:

الحل: ن(س) = ٤س ٣ − س ٤ − ٢٩ متصل على ح لانه كثير حدود

ن′(س) = ١٢ أس ٢ − ٤س ٣

صفر = ٤س ٢ (٣ − س) ← س = ٠ ، س = ٣



ق(٣) قيمة عظمى محلية وهي مطلقة لانها وحيدة

ق(٣) = ٤ × ٢٧ − ٨١ − ٢٩ = ١٠٨ − ١١٠ = − ٢

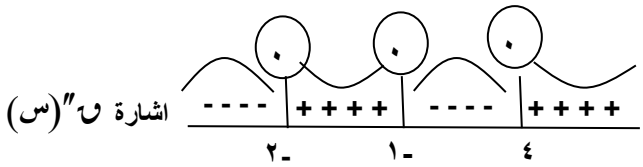
إذن ن(س) ≥ − ٢ ، ∀ س ∈ ح ⇐ ن(س) سالب دائماً

تمارين (٢-٤) التقعر ونقط الانعطاف صفحة ٨١

السؤال الأول :

أ) ن″(س) = (س ٢ − ٣س − ٤)(س + ٢)

٠ = (س + ١)(س − ٤)(س + ٢) ← س = − ٢ ، − ١ ، ٤



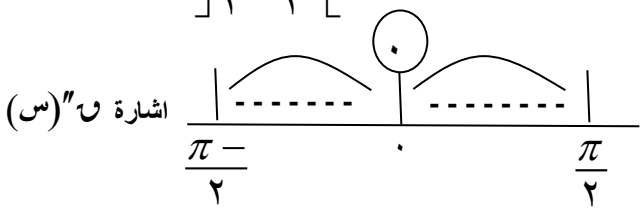
مجالات التقعر للاقتران ن(س) هي :

ن(س) مقعرا الى اعلى في]− ٢ ، − ١[كذلك في]٤ ، ∞[،

ومقعرا الى اسفل في]− ∞ ، − ٢[كذلك في]− ١ ، ٤[

ب) ن′(س) = جاس − س ، س ∈ $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ ، ن″(س) = جتاس − ١ ، س ∈ $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

٠ = جتاس − ١ ← جتاس = ١ ← س = ٠



ن(س) مقعر الى اسفل في $\left]\frac{-\pi}{2}, ٠\right[$ كذلك في $\left]٠, \frac{\pi}{2}\right[$

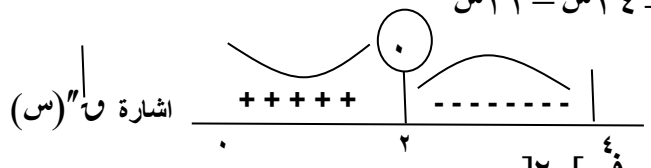
ج) ن(س) = ٤س ٣ − س ٤ + س ، س ∈ [٠ ، ٤]

ن′(س) = ١٢ أس ٢ − ٤س ٣ + ١ ، س ∈]٠ ، ٤[

شركة الراتب للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبدالرحمن شقير
00970568-952714

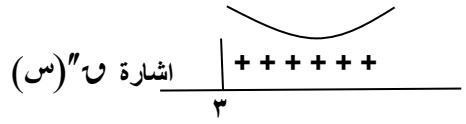
ن″(س) = ٤ ٢س − ٢ ١س^{٢} ، س ∈]٠،٤[← ٤ ٢س − ٢ ١س^{٢} = ٠

← س = ٠ ، س = ٢ ∉]٠،٤[



ن(س) مقعر الى اسفل في]٠،٢[و مقعر الى اعلى في]٢،٤[

د) ن(س) = (س − ٣)$^{\frac{٣}{٢}}$ ، مجال ن(س) هو س ≥ ٣



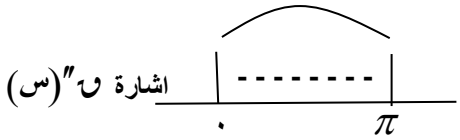
ن′(س) = $\frac{٣}{٢}$ (س − ٣)$^{\frac{١}{٢}}$ ، س ∈]٣،∞[

ن″(س) = $\frac{٣}{٢} \times \frac{١}{٢}$ (س − ٣) $^{\frac{-١}{٢}}$ = $\frac{٣}{٤}$ (س − ٣)$^{\frac{-١}{٢}}$ ، س ∈]٣،∞[، ن″(س) موجبة دائما

و ن″(س) ≠ ٠ ، ∀ س ∈]٣،∞[ومنها ن(س) مقعر الى اعلى في]٣،∞[

هـ) ن(س) = جا$\frac{س}{٢}$ ، س ∈]٠،π[← ن′(س) = $\frac{١}{٢}$ جتا$\frac{س}{٢}$ ، س ∈]٠،π[

ن″(س) = $\frac{-١}{٤}$ جا$\frac{س}{٢}$ ، س ∈]٠،π[



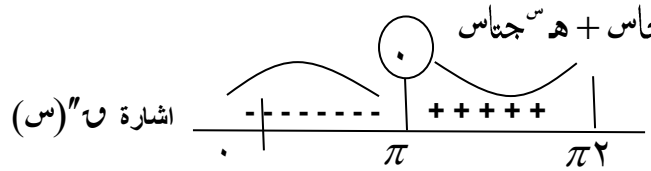
ن″(س) = ٠ ← $\frac{-١}{٤}$ جا$\frac{س}{٢}$ = ٠

← $\frac{س}{٢}$ = ٠ ← س = ٠ او ← $\frac{س}{٢}$ = π ← س = ٢π ترفض فيكون ن(س) مقعر الى اسفل في]٠،π[

و) ن(س) = هـ^{س} جتاس ، س ∈]٠،٢π[← ن′(س) = − هـ^{س} جاس + هـ^{س} جتاس ، س ∈]٠،٢π[

ن″(س) = − هـ^{س} جتاس + − هـ^{س} جاس + − هـ^{س} جاس + هـ^{س} جتاس

= − ٢هـ^{س} جاس ، س ∈]٠،٢π[



ن″(س) = ٠ ← − ٢هـ^{س} جاس = ٠ ← س = π

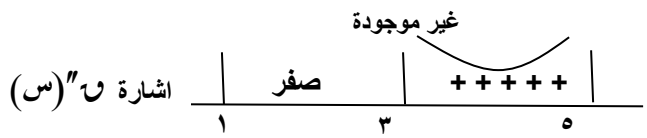
ن(س) مقعر الى اسفل في]٠،π[و ن(س) مقعر الى اعلى في]π،٢π[

ز) $ن(س) = \begin{cases} [\frac{١}{٣}س - ١] & ١ < س \geq ٣ \\ س^{٣} & ٣ < س \geq ٥ \end{cases} = \begin{cases} -١ & ، \quad ١ < س < ٣ \\ ٠ & ، \quad س = ٣ \\ س^{٣} & ، \quad ٣ < س \leq ٥ \end{cases}$

نهـــا $_{س \to ٣^-}$ ن(س) = −١ ، نهـــا $_{س \to ٣^+}$ ن(س) = ٢٧ ، ن(٣) = ٠ ← ن(س) غير متصل عند س=٣

ومنها فان ن′(٣) غير موجودة

$ن'(س) = \begin{cases} ٠ & ، \quad ١ < س < ٣ \\ ٣س^{٢} & ، \quad ٣ < س < ٥ \end{cases}$



$ن''(س) = \begin{cases} ٠ & ، \quad ١ < س < ٣ \\ ٦س & ، \quad ٣ < س < ٥ \end{cases}$

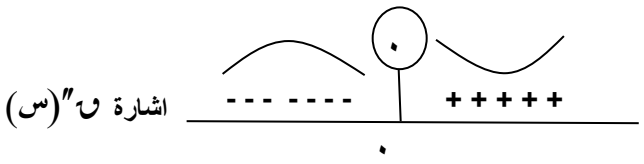
ن″(س) = ٦س = ٠ ← س = ٠ ∉]٣،٥[

ن(س) اقتران ثابت في]١،٣[، و مقعر الى اعلى في]٣،٥[

السؤال الثاني : أ) ن(س) = س ^{٣} + س متصل على ع لانه كثير حدود

ن′(س) = ٣س ^{٢} + ١ ← ن″(س) = ٦س

ن″(س) = ٠ ← س = ٠

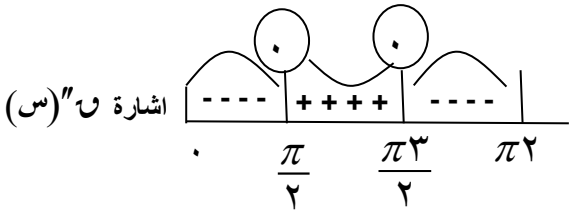


(٠،٠) = (٠)ن،٠) نقطة انعطاف لان الاقتران متصل عندها ويغير من مجال تقعره

ب) ن(س) = جتاس متصل في]٠،٢π[

ن′(س) = −جاس ← ن″(س) = −جتاس ، س ∈]٠،٢π[

ن″(س) = ٠ ← س = $\frac{\pi}{٢}$ ، س = $\frac{\pi ٣}{٢}$



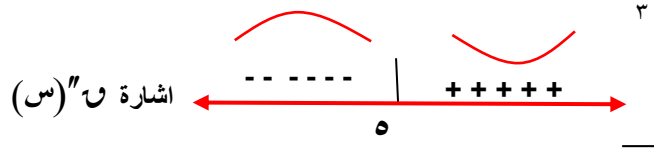
نقاط الانعطاف هي : $\left(\frac{\pi}{٢}، ن(\frac{\pi}{٢})\right) = \left(٠، \frac{\pi}{٢}\right)$ ، $\left(\frac{\pi ٣}{٢}، ن(\frac{\pi ٣}{٢})\right) = \left(٠، \frac{\pi ٣}{٢}\right)$

لأن الاقتران متصل عندها ويغير من اتجاه تقعره .

شركة الرائد للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبد الرحمن شقير
00970568-952714

ج) $ن(س) = \sqrt[3]{(٥-س)}$ ، $\leftarrow$ ، $ن'(س) = \frac{١}{٣}(٥-س)^{\frac{-٢}{٣}}$

$$ن''(س) = \frac{١}{٣} \times \frac{-٢}{٣}(٥-س)^{\frac{-٥}{٣}} = \frac{-٢}{٩} \times \frac{١}{\sqrt[3]{(٥-س)^{٥}}}$$



$ن''(س) \neq ٠ \quad \forall س \in ع$

اذن يوجد نقطة انعطاف عندما س = ٥ لان ق متصل ويغير من مجال تقعره وهي (٠،٥)

السؤال الثالث :

أ) $ن(س) = س^{٣} + ٦س^{٢} \leftarrow ن'(س) = ٣س^{٢} + ١٢س \leftarrow ن''(س) = ٦س + ١٢$

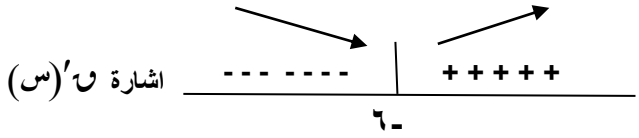
$ن'(س) = ٠ \leftarrow ٠ = ٣س(س+٤) \leftarrow س = ٠ ، س = -٤$

$ن''(٠) = ١٢ > ٠ \leftarrow ن(٠) = ٠$ **قيمة صغرى محلية**

$ن''(-٤) = -١٢ < ٠ \leftarrow ن(-٤) = ٣٢$ **قيمة عظمى محلية**

ب) $ن(س) = |س+٦| = \begin{cases} س+٦ & ، \ س > -٦ \\ -س-٦ & ، \ س \geq -٦ \end{cases}$ متصل على ع

$ن'(س) = \begin{cases} ١ & ، \ س > -٦ \\ -١ & ، \ س < -٦ \end{cases}$



$ن'(-٦)$ **غير موجودة اذن** $ن''(-٦)$ **غير موجودة**

فشل اختبار المشتقة الثانية ومنها فإن $ن(-٦) = ٠$ **قيمة صغرى محلية وهي صغرى مطلقة**

السؤال الرابع:

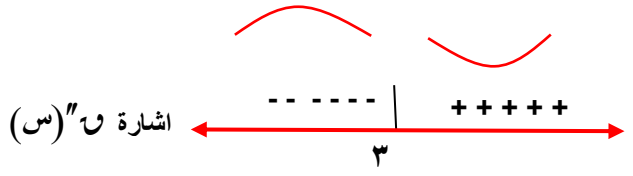
$ن(س) = ا س^{٢} + س^{٣}$ **له عند س= -١ نقطة انعطاف** $\leftarrow ن''(-١) = ٠$

$ن'(س) = ٢ا س + ٣س^{٢}$

$ن''(س) = ٢ا + ٦س \Leftarrow ن''(-١) = -٢ا + ٦$

$٠ = -٢ا + ٦ \leftarrow ا = ٣$

السؤال الخامس:



ن′(٠) = ن′(٦) = ٠

أ) من اشارة ن″(س)

ن(س) مقعر إلى أسفل في]-∞، ٣[ومقعر إلى اعلى في]٣، ∞[

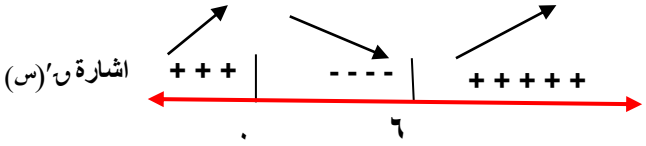
يوجد نقطة انعطاف عندما س=٣ لان ق متصل (المشتقة موجودة)

ويغير من مجال تقعره هي (٣، ن(٣)) .

ب) ن′(٠) = ٠ ، ن″(٠) > ٠ ⇐ ن(٠) قيمة عظمى محلية

ن′(٦) = ٠ ، ن″(٦) < ٠ ⇐ ن(٦) قيمة صغرى محلية

ج) ن(س) متزايد في]-∞، ٠[



وأيضا في]٦، ∞[ومتناقص في]٠، ٦[

السؤال السادس:

المعطيات: ن(س) = أس٣ + ب س٢ + جس + د : أ، ب، جـ، د ∈ ح

منحنى ق يمر بالنقطة (١، ٥) ← ق(١)=٥

(٢، ١) نقطة انعطاف ← ق(٢)=١ ، ن″(٢) = ٠

معادلة المماس عند (٢، ١) هي ٣س+ص=٧ ← ن′(٢) = -٣

الحل: ن(١) = أ + ب + جـ + د ⇐ ٥ = أ + ب + جـ + د ---------- ١

ن(٢) = ٨أ + ٤ب + ٢جـ + د ⇐ ١ = ٨أ + ٤ب + ٢جـ + د ---------- ٢

ن′(س) = ٣أس٢ + ٢ب س + جـ

ن′(٢) = ١٢ أ + ٤ب + جـ ⇐ -٣ = ١٢ أ + ٤ب + جـ ---------- ٣

ن″(س) = ٦أس + ٢ب

ن″(٢) = ١٢ أ + ٢ب ⇐ ٠ = ٦أ + ب ---------- ٤

بحل نظام المعادلات نحصل على

أ = -١، ب = ٦، جـ = -١٥، د = ١٥

إذن ن(س) = -س٣ + ٦س٢ - ١٥س + ١٥

شركة الرائد للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبدالرحمن شقير
00970568-952714

السؤال السابع :

المعطيات: $ن(س) = س^{٤} - ٤س^{٣} + ك(س)$

(١، ٢) نقطة انعطاف افقي للاقتران ق(س) $\Leftarrow ن(١) = ٢، ن'(١) = ٠ ، ن''(١) = ٠$

$ع(س) = ك^{٢}(س)$ **احسب** $ع''(١)$

الحل: $ن(١) = ١^{٤} - ٤ \times ١^{٣} + ك(س) \Leftarrow ٢ = ١ - ٤ + ك(١) \Leftarrow ك(١) = ٥$

$ن'(س) = ٤س^{٣} - ١٢س + ك'(س)$

$ن'(١) = ٤ - ١٢ + ك'(١) \Leftarrow ٠ = -٨ + ك'(١) \Leftarrow ك'(١) = ٨$

$ن''(س) = ١٢س^{٢} - ٢٤س + ك''(س)$

$ن''(١) = ١٢ - ٢٤ + ك''(س) \Leftarrow ٠ = -١٢ + ك''(١) \leftarrow ك''(١) = ١٢$

$ع(س) = ك^{٢}(س)$

$ع'(س) = ٢ك(س) \times ك'(س)$

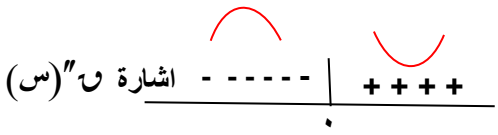
$ع''(س) = ٢ك(س) \times ك''(س) + ٢\left(ك'(س)\right)^{٢}$

$ع''(١) = ٢ك(١) \times ك''(١) + ٢\left(ك'(١)\right)^{٢}$

$= ٢ \times ٥ \times ١٢ + ٢(٨)^{٢} = ١٢٠ + ١٢٨ = ٢٤٨$

السؤال الثامن: **المعطيات:** ق(٠)=٠ ، $ن'(١) = ٠، ن'(-٢) = ٠$

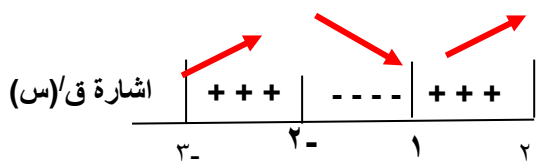
ب) قيم س التي يكون للاقتران عندها قيمة قصوى هي س=١ ،س=-٢ بحيث ق(١) قيمة صغرى محلية و ق(-٢) قيمة عظمى محلية (ظهر ذلك من خلال اختبار المشتقة الثانية) اما ق(-٣) قيمة صغرى محلية ، ق(٢) قيمة عظمى محلية (يظهر ذلك من خلال إشارة المشتقة الاولي لان اختبار المشتقة الثانية يفشل).



ج) للاقتران نقطة انعطاف عند س=٠ هي (٠،٠) ، ق متصل عندها ويغير من مجال تقعره

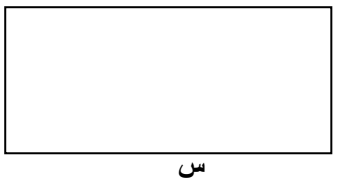
أ) ق(س) متزايد $[-٣، -٢]$

كذلك في $[١، ٢]$ **ومتناقص في** $[-٢، ١]$



تمارين (٢-٥) تطبيقات القيم القصوى صفحة ٨٧

السؤال الأول :



الحل : محيط المستطيل = الطولين + العرضين

٨٠=٢س+٢ص

٤٠=س+ص ومنها ص= ٤٠- س

مساحة المستطيل = الطول × العرض

م= س× ص

م= س(٤٠ – س) **٠<س<٤٠**

م= ٤٠س- س^{٢}

$$\frac{د م}{د س} = ٤٠ - ٢س$$

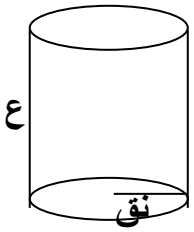
صفر = ٤٠- ٢س ومنها س= ٢٠

$$\frac{د^{٢} م}{د س^{٢}} = -٢ \Leftarrow \left| \frac{د^{٢} م}{د س^{٢}} \right|_{س=٢٠} = -٢ < ٠$$

إذن المساحة أكبر ما يمكن عندما س= ٢٠ م ومنها ص= ٢٠ م

ومنها مساحة اكبر حديقة ٤٠٠ متر مربع

السؤال الثاني :



الحجم = مساحة القاعدة × الارتفاع

$$١٩٢\pi = نق^{٢} \times \pi \times ع \Leftarrow ع = \frac{١٩٢}{نق^{٢}}$$

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة (لأنها مفتوحة من أعلى)

$$م = ٢\pi نق \times ع + \pi نق^{٢}$$

التكلفة ت = ٢ نق ع π + نق^{٢} π ×٣ل ، بفرض أن اسم^{٢} من الجوانب يكلّف ل إذن اسم^{٢} من القاعدة يكلف ٣ ل

$$ت = ٢\pi نق \times ع + ٣ل\pi نق^{٢}$$

$$ت = ٢\pi نق \times \frac{١٩٢}{نق^{٢}} + ٣ل\pi نق^{٢}$$

$$ت = ٣\pi ك نق + ٣ل\pi نق^{٢} \times \frac{١}{نق} \quad ، \quad نق > ٠$$

$$\frac{د ت}{د نق} = ٣\pi ك + ٣ل\pi \times ٢نق = \frac{-٣٨٤\pi ل}{نق^{٢}} + ٦ل\pi نق$$

شركة الرائد للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبدالرحمن شقير
00970568-952714

$$\frac{-٣٨٤\ \pi\ ل}{نو_{هـ}^{٢}} + ٦\ \pi\ ل نو_{هـ} = ٠ \quad \text{ومنها ينتج أن} \quad \frac{٣٨٤\ \pi\ ل}{نو_{هـ}^{٢}} = ٦\ \pi\ ل نو_{هـ}$$

$$٦٤ = نو_{هـ}^{٣} \Leftarrow نو_{هـ} = ٤ \text{سم}$$

$$\frac{د^{٢}ت}{د نو_{هـ}^{٢}} = -٣٨٤\ \pi ل \times \frac{-٢نو_{هـ}}{نو_{هـ}^{٤}} + ٦\pi ل = \frac{٧٦٨\ \pi ل}{نو_{هـ}^{٣}} + ٦\pi ل$$

$$\left.\frac{د^{٢}ت}{د نو_{هـ}^{٢}}\right|_{نو_{هـ}=٢} = ١٩٢\ \pi ل \quad < ٠ \Leftarrow \text{التكلفة أقل ما يمكن عندما نق= ٤سم}$$

$$ع = \frac{١٩٢}{نو_{هـ}^{٢}} = \frac{١٩٢}{١٦} = ١٢ \text{سم}$$

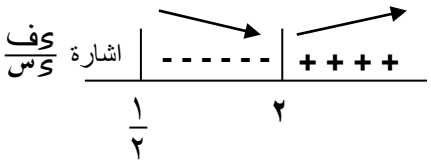
إذن ابعاد الاسطوانة الاقل تكلفة هي نصف قطر القاعدة=٤سم وارتفاعها ١٢سم

السؤال الثالث : $ص = ن(س) = \sqrt{٢س - ١}$

$$ف^{٢} = (س - ٣)^{٢} + (ص - ٠)^{٢} = (س - ٣)^{٢} + ص^{٢}$$

$$ف^{٢} = (س - ٣)^{٢} + ٢س - ١ \ ، \ س \leq \frac{١}{٢}$$

$$٢ف \frac{د ف}{د س} = ٢(س - ٣) + ٢ \ ، \ س < \frac{١}{٢}$$



$$\frac{د ف}{د س} = \frac{س - ٢}{ف}$$

$$\frac{د ف}{د س} = ٠ \leftarrow ٠ = \frac{س - ٢}{ف} \leftarrow ٠ = س - ٢ \leftarrow س = ٢$$

المسافة اقل ما يمكن عندما $س = ٢ \leftarrow ص = \sqrt{٣} \leftarrow و = (٢، \sqrt{٣})$

السؤال الرابع :

$$ف = ا جتا \frac{\pi}{٤} ن + ب جا \frac{\pi}{٤} ن$$

$$\text{السرعة المتوسطة} = \frac{\Delta ف}{\Delta ن} = \frac{ف(٢) - ف(٠)}{٢ - ٠}$$

$$\frac{\left(أ جتا\frac{\pi}{٢}+ب جا\frac{\pi}{٢}\right)-\left(أ جتا(٠)+ب جا(٠)\right)}{٢}=١٠$$

$$٢٠=ب-أ$$ ---------- (١)

$$ع=\frac{ف_{ع}}{ن_{ع}}=أ\times-جا\frac{\pi}{٤}ن\times\frac{\pi}{٤}+ب\times جتا\frac{\pi}{٤}ن\times\frac{\pi}{٤}$$

$$ع=\frac{\pi أ-}{٤}\times-جا\frac{\pi}{٤}ن+\frac{\pi ب}{٤}جتا\frac{\pi}{٤}ن$$

سرعة الجسم اقل ما يمكن عند $ن=١\leftarrow ع'(١)=٠$

$$ع'(ن)=\frac{\pi أ-}{٤}\times جتا\frac{\pi}{٤}ن\times\frac{\pi}{٤}+\frac{\pi ب}{٤}\times-جا\frac{\pi}{٤}ن\times\frac{\pi}{٤}$$

$$ع'(ن)=-أ\left(\frac{\pi}{٤}\right)^{٢}\times جتا\frac{\pi}{٤}ن+-ب\left(\frac{\pi}{٤}\right)^{٢}جا\frac{\pi}{٤}ن$$

$$ع'(١)=-أ\left(\frac{\pi}{٤}\right)^{٢}\times جتا\frac{\pi}{٤}+-ب\left(\frac{\pi}{٤}\right)^{٢}جا\frac{\pi}{٤}$$

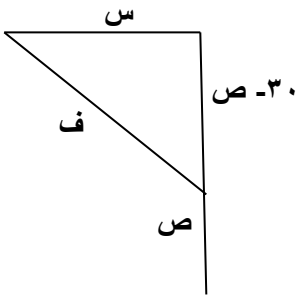
$$٠=-أ\left(\frac{\pi}{٤}\right)^{٢}\times\frac{١}{\sqrt{٢}}-ب\left(\frac{\pi}{٤}\right)^{٢}\times\frac{١}{\sqrt{٢}}$$

$$٠=-أ-ب\leftarrow أ=-ب$$ ---------- (٢) نعوض قيمة أ من ٢ في ١

$$٢٠=ب-\left(-ب\right)\leftarrow ٢٠=٢ب\leftarrow ب=١٠$$

$$٢٠=ب-أ\leftarrow ٢٠=١٠-أ\leftarrow أ=-١٠$$

السؤال الخامس:



$$ف^{٢}=(٣٠-ص)^{٢}+س^{٢}$$

$$\frac{ص_{ع}}{ن_{ع}}=١٠\leftarrow س=٠١ن\ ،\ \frac{س_{ع}}{ن_{ع}}=٢٠\leftarrow ص=٠٢ن$$

$$ف^{٢}=(٣٠-٠٢ن)^{٢}+(٠١ن)^{٢}$$

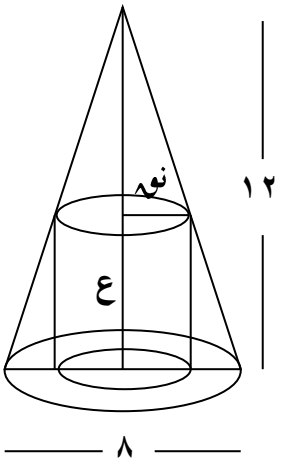
$$٢ف\frac{ف_{ع}}{ن_{ع}}=٢(٣٠-٠٢ن)\times-٢٠+٢(٠١ن)\times١٠$$

$\frac{\text{ف}}{\text{ن}} = \frac{\text{ف}}{\text{ن}} - ٦٠٠ + ٨ن٤٠٠ + ٨ن١٠٠$ ومنها $\frac{\text{ف}}{\text{ن}} = \frac{٦٠٠ + ٨ن٥٠٠}{\text{ف}}$

$\frac{\text{ف}}{\text{ن}} = ٠ \Leftarrow ٨ن = \frac{٦٠٠}{٥٠٠} = \frac{٦}{٥} = ١,٢$ ساعة = ساعة و ١٢ دقيقة

المسافة بين الباخرتين اقل ما يمكن الساعة الواحدة و ١٢ دقيقة

السؤال السادس:



حجم الاسطوانة = $\pi \times \text{نوه}^{٢} \times \text{ع}$

من تشابه المثلثات

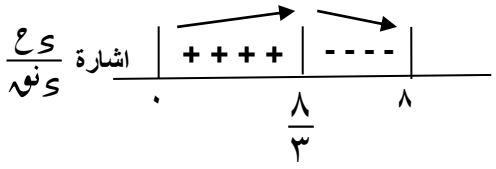
$\frac{\text{نوه}}{٤} = \frac{١٢ - \text{ع}}{١٢}$ ومنها $\text{نوه} = \frac{١٢ - \text{ع}}{٣}$

$\text{ع} = ١٢ - ٣\text{نوه}$

$\text{ع} = \pi \text{نوه}^{٢}(١٢ - ٣\text{نوه})$ ، $٠ < \text{نوه} < ٤$

$\text{ع} = ١٢\pi \text{نوه}^{٢} - ٣\pi \text{نوه}^{٣}$

$\frac{\text{ع}}{\text{ن نوه}} = ٢٤\pi \text{نوه} - ٩\pi \text{نوه}^{٢}$

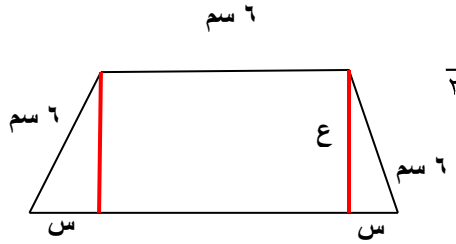


$٠ = ٣\pi \text{نوه}(٨ - ٣\text{نوه})$ ومنها $\text{نوه} = ٠$ ترفض أو $\text{نوه} = \frac{٨}{٣}$ سم

إذن الحجم أكبر ما يمكن عندما $\text{نوه} = \frac{٨}{٣}$ فيكون أكبر حجم= $\left(\frac{٨}{٣} \times ٣ - ١٢\right)\left(\frac{٦٤}{٩}\right)\pi$

$= (٤)\left(\frac{٦٤}{٩}\right)\pi = \frac{٢٥٦\pi}{٩}$ سم^{٣}

السؤال السابع :



مساحة شبه المنحرف $= \frac{١}{٢}(٢س + ٦ + ٦)$ ع ، $\text{ع} = \sqrt{٣٦ - س^{٢}}$

$م = (س + ٦)\sqrt{٣٦ - س^{٢}}$

$م' = \sqrt{٣٦ - س^{٢}} + (س + ٦) \times \frac{-٢س}{٢\sqrt{٣٦ - س^{٢}}}$

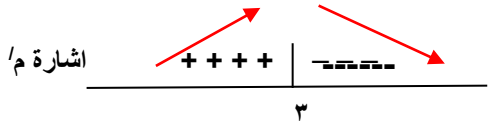
شركة الراتب للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبد الرحمن شاهين
00970568-952714

م ´ = $\frac{-٢س^{٢}-٦س+٣٦}{\sqrt{٣٦-س^{٢}}}$ = ٠

$-٢س^{٢}-٦س+٣٦=٠$

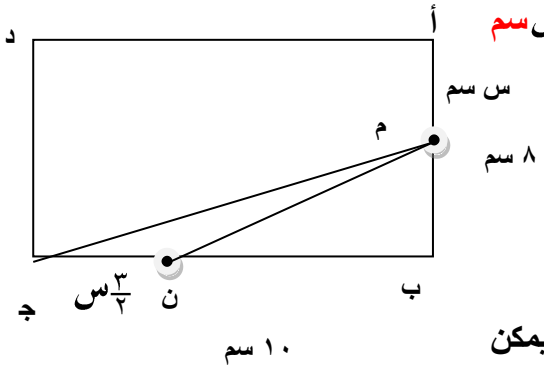
$(س+٦)(س-٣)=٠$

س = -٦ ، ٣



عندما س= ٣ يوجد قيمة عظمى وتكون اكبر مساحة ممكنة = ٢٧ $\sqrt{٣}$ وحدة مساحة

السؤال الثامن : نفرض أ م = س سم ، فيكون ب م = ٨ - س سم



م = $\frac{١}{٢}$ ($\frac{٣}{٢}$س(٨-س))

م = $\frac{١}{٢}$ (١٢س - $\frac{٣}{٢}$$س^{٢}$)

م ´ = $\frac{١}{٢}$ (١٢ - ٣س) = ٠ ومنها س= ٤

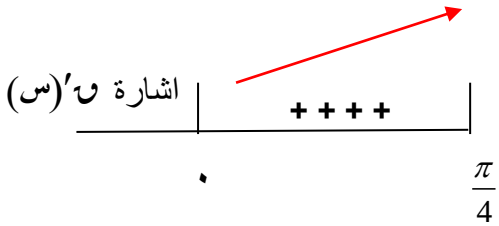
يوجد عندما س= ٤ قيمة عظمى تجعل مساحة المثلث اكبر ما يمكن

تمارين عامة (الوحدة الثانية) صفحة ٨٨

السؤال الأول:

رقم الفقرة	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢	١٣	١٤
رمز الإجابة	جـ	ب	ب	ب	د	جـ	ا	د	أ	جـ	د	جـ	جـ	أ

السؤال الثاني :



ن´(س) = جتاس - جاس = ٠ ← س = $\frac{\pi}{٤}$

نلاحظ ان ن´(س) > ٠ ∀س ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٤}$[

ومنها ق(س) متزايد على $\left[٠ ، \frac{\pi}{٤}\right]$

شركة الراتب للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبدالرحمن فقير
00970568-952714

شركة الراتب للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبدالرحمن شقير
00970568-952714

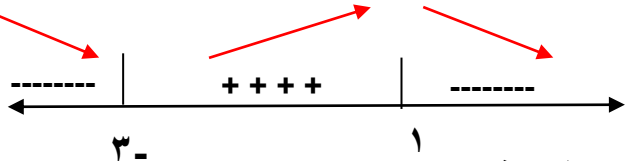
السؤال الثالث:

$$ن(س)=\frac{س+١}{س^{٢}+٣} \leftarrow ن'(س)=\frac{س^{٢}+٣-(س+١)\times٢س}{(س^{٢}+٣)^{٢}}$$

$$ن'(س)=\frac{س^{٢}+٣-(س+١)\times٢س}{(س^{٢}+٣)^{٢}}=\frac{٣-س^{٢}-٢س}{(س^{٢}+٣)^{٢}}$$

$$ن'(س)=٠ \leftarrow (س-١)(س+٣)=٠ \leftarrow س=١ ، س=-٣$$

اشارة ن′(س)



ق متزايد في الفترة $[-٣، ١]$ ومتناقص في $]-\infty، -٣]$ و $[١، \infty[$

$ه(-٣)=\frac{-١}{٦}$ قيمة صغرى محلية ، $ه(١)=\frac{١}{٢}$ قيمة عظمى محلية

السؤال الرابع :

$ن(س)=س^{٢}-٣س-أ$ يحقق رول $[-٢، أ]$ أوجد أ

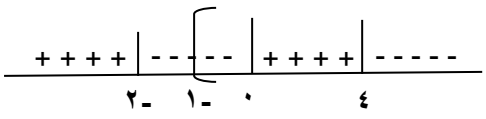
ق يحقق رول ومنها ق متصل وقابل للاشتقاق على $[-٢، أ]$ و $ن(-١)=ن(أ)$

$ن(-١)=١+٣-أ=٤-أ$

$ن(أ)=أ^{٢}-٣أ-أ=أ^{٢}-٤أ$

$ن(-١)=ن(أ) \Leftarrow (٤-أ)=(أ^{٢}-٤أ)$

$أ^{٢}-٣أ-٤=٠$ ومن أ=٤، أ=-١ (تهمل)



السؤال الخامس :

أ) $ن(س)=س^{٣}-٣س^{٢}-٩س+٥$ ، $[-٢، ٦]$

$ن'(س)=٣س^{٢}-٦س-٩$

$٠=س^{٢}-٢س-٣=(س-٣)(س+١)$

النقط الحرجة عند س= -٢ ، -١ ، ٣، ٦

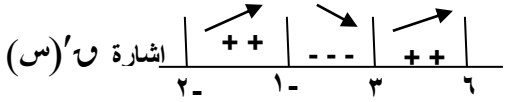
ق(-٢)= -٨ -٣×٤-٩×-٢+٥= -٨ -١٢+١٨+٥ = ٣

ق(-١) = -١-٣+٩+٥=١٠

ق(٣)= ٢٧-٣×٩-٩×٣+٥=٢٧-٢٧+٥=-٢٢ قيمة صغرى مطلقة

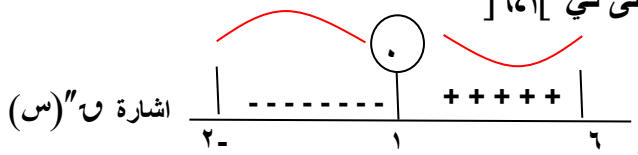
ق(٦)= ٦×٣٦-٣×٣٦-٩×٣٦+٥=١٠٨-٥٤+٥ =١١٣=٥٤-٥٩ قيمة عظمى مطلقة

اشارة ن′(س)



ب) $ن''(س) = ٦س - ٦ = ٠ \leftarrow س = ١$

ق مقعر الى اسفل في $]-\infty، ١[$ ومقعر الى اعلى في $]١، ٦[$



ج) (١، -٦) نقطة انعطاف ،متصل ويغير من تقعره

ظل زاوية الانعطاف = $ن'(١) = -٢$

السؤال السادس:

أ) اشارة $ن''(س)$

منحنى ق(س) مقعر الى اعلى في $]-\infty، -٢[$ كذلك في $]١، \infty[$ ومقعر الى اسفل في $]-٢، ١[$

ب) للاقتران نقاط انعطاف عند س= -٢ ، س=١ لان ق متصل ويغير من مجال تقعره

السؤال السابع:

ق كثير حدود معرف على $[-٢، ٦]$ يقع منحناه في الربع الاول ومنها ق> ٠ في $[-٢، ٦]$

ق متناقص على مجاله ومنها $ن' < ٠$ في $]-٢، ٦[$

هـ(س) =١- س ومنها هـ < صفر في $[-٢، ٦]$

$هـ' = -١ < ٠$ في $]-٢، ٦[$ بين أن ك = ق×هـ متناقص في $]-٢، ٦[$

$(ن \times هـ)'(س) = ن(س).هـ'(س) - هـ(س).ن'(س)$

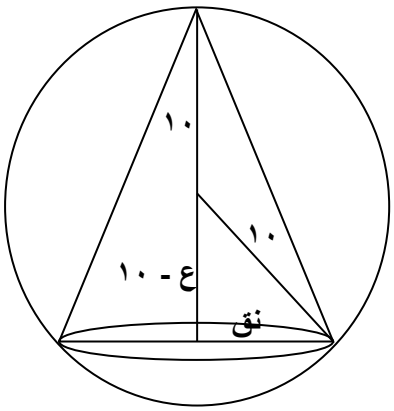
اشارة $(ن \times هـ)'(س)$ = موجب×سالب – سالب ×سالب= سالب

إذن ق×هـ متناقص في $[-٢، ٦]$

شركة الراتب للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبدالرحمن فقير
00970568-952714

السؤال الثامن:

$نق^٢ + (ع - ١٠)^٢ = ١٠٠$ ومنها $نق^٢ = ١٠٠ - (ع^٢ - ٢٠ع + ١٠٠)$ اذن $نق^٢ = ٢٠ع - ع^٢$



$ح = \frac{\pi}{٣} نق^٢ ع = \frac{\pi}{٣}(٢٠ع - ع^٢) \times ع$

$\leftarrow ح = \frac{\pi}{٣}(٢٠ع^٢ - ع^٣)$

$\frac{ح د}{د ع} = \frac{\pi}{٣}(٤٠ع - ٣ع^٢) \leftarrow \frac{\pi}{٣} ع(٤٠ - ٣ع) = ٠$

ع = ٠ ترفض أو $ع = \frac{٤٠}{٣}$ سم

$\frac{ح^٢ د}{د ع^٢} = \frac{\pi}{٣}(٤٠ - ٦ع)$

شركة الرائد للتفوق والإبداع الثقافي
00970568-952714
د. عبدالرحمن شقير

$$\left|\frac{د^{٢}ع}{د ع^{٢}}\right|_{ع=\frac{٤٠}{٣}} = \left(\frac{٤٠}{٣}\times٦-٤٠\right)\frac{\pi}{٣} = \frac{\pi}{٣}\times٤٠^{-}<٠$$

إذن الحجم اكبر ما يمكن عندما $ع=\frac{٤٠}{٣}$ **سم نوه** $=\frac{٢٠}{٣}$ **سم**

السؤال التاسع:

$$ن(س)=جتاس-هـ(س)+٣س\ ،\ س\in\left[٠،\frac{\pi}{٢}\right]$$

اثبت أن (ق+هـ)(س) متزايد في $\left[٠،\frac{\pi}{٢}\right]$

$$(ن+هـ)(س)=جتاس+٣س$$

$$(ن+هـ)'(س)=-جاس+٣>٠\quad\forall\ س\in\left]٠،\frac{\pi}{٢}\right[$$

لأن $-١\le جاس<+١\Leftarrow -جاس+٣<-١+٣=٢$

إذن ق+هـ متزايد في $\left[٠،\frac{\pi}{٢}\right]$

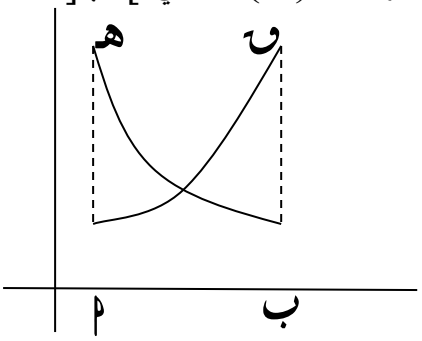
السؤال العاشر:

بين أن $\frac{ن'(س)}{هـ(س)}$ **اقتران متزايد على** $[أ،ب]$

ق>٠ ، هـ >٠ يقعان في الربع الاول

ق متزايد في $[أ،ب]$ $ن'(س)>٠$ **في** $]أ،ب[$ **، ق مقعر الى أعلى ومنها** $ن''(س)>٠$ **في** $]أ،ب[$

هـ متناقص في $[أ،ب]$ **ومنها** $هـ'(س)<٠$ **في** $]أ،ب[$



$$\left(\frac{ن'(س)}{هـ(س)}\right)' = \frac{هـ(س)ن''(س)-ن'(س)هـ'(س)}{هـ(س)^{٢}}$$

اشارة $\left(\frac{ن'(س)}{هـ(س)}\right)' = \frac{(-\times+)-(+\times+)}{+}=$ **موجب**

إذن $\frac{ن'(س)}{هـ(س)}$ **متزايد** $[أ،ب]$

شركة الراتب للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبدالرحمن شقير
00970568-952714

السؤال الحادي عشر :

$ن(س) = أ س^{٣} + ب س^{٢} + جـ س + ء$

$ن(٠) = ٣ \Leftarrow ٣ = ء$

$ن'(س) = ٣أ س^{٢} + ٢ب س + جـ$

$ن'(٢) = ٠ \Leftarrow ٣ أ \times ٤ + ٠ + جـ = ٣ \Leftarrow ٢ أ + جـ = -٣$

$ن''(س) = ٦أ س + ٢ب$

$ن''(٠) = ٢ب = ٠ \Leftarrow ب = ٠$

$ن(٠) = ٣ \Leftarrow ٣ = ء$

$ن(٢) = -١ \Leftarrow ٨أ + ٤ب + ٢جـ + ء = -١$

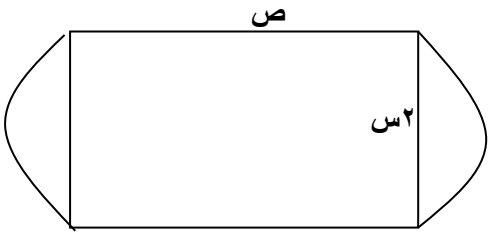
$٨أ + ٢جـ = -٤$

$ن'(٢) = ٠ \Leftarrow ٣ أ \times ٤ + جـ = ٠ \Leftarrow ٢ أ + جـ = ٠$

وبحل المعادلتين ينتج ان $أ = \frac{١}{٤}$ ، $جـ = -٣$

$ن(س) = \frac{١}{٤} س^{٣} - ٣س + ٣$

السؤال الثاني عشر :



محيط الدائرة = $٢نق = \pi$

$= \pi س٢$

محيط الشكل = $\pi س٢ + ص٢$

$٤٠٠ = \pi س٢ + ص٢$

$ص = ٢٠٠ - \pi س \Leftarrow ص + \pi س = ٢٠٠$

مساحة المستطيل = $٢س \times ص$

$م = ٢س \times ص = ٢س (٢٠٠ - \pi س)$

$م = ٤٠٠ س - ٢ \pi س^{٢}$

$\frac{ء م}{ء س} = ٤٠٠ - ٤ \pi س \leftarrow ٠ = \frac{ء م}{ء س} \leftarrow س = \frac{١٠٠}{\pi} م$

$\left. \frac{ء^{٢} م}{ء س^{٢}} \right|_{س = \frac{١٠٠}{\pi}} = -٤ \pi < ٠ \leftarrow$ **المساحة اكبر ما يمكن عندما** $س = \frac{١٠٠}{\pi}$

الابعاد التي تجعل مساحة المستطيل اكبر ما يمكن هي

طول المستطيل = $٢٠٠ - \pi \times \frac{١٠٠}{\pi} = ١٠٠ م$ **و عرض المستطيل =** $\frac{٢٠٠}{\pi} م$

السؤال الثالث عشر:

محيط المثلث الأول = س ومنه طول الضلع = $\frac{س}{٣}$ ، مساحة المثلث الأول $\frac{\sqrt{٣}}{٣٦}$ س^{٢}

محيط المثلث الثاني = ١٨ − س ومنه طول الضلع = $\frac{١٨-س}{٣}$ ،

مساحة المثلث الأول $\frac{\sqrt{٣}}{٣٦}$ (١٨ − س)^{٢}

م= مجموع مساحتيهما = $\frac{\sqrt{٣}}{٣٦}$ س^{٢} + $\frac{\sqrt{٣}}{٣٦}$ (١٨ − س)^{٢}

م$'$ = $\frac{\sqrt{٣}}{١٨}$ س − $\frac{\sqrt{٣}}{١٨}$ (١٨ − س)

م$'$ = ٠ ⟸ س = ٩

م$''$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٩}$ > ٠ س = ٩ قيمة صغرى محلية

محيط المثلث الأول = ٩سم ومحيط المثلث الثاني = ٩ سم وبالتالي طول ضلع كل من المثلثين = ٣ سم

حلول الوحدة الثالثة / المصفوفات
تمارين (٣ – ١) صفحة ٩٨

السؤال الأول:

أ) لتكن مصفوفة الانتاج هي أ = $\begin{bmatrix} ٨٠٠ & ٦٠٠ & ٧٥٠ \\ ٩٠٠ & ٤٥٠ & ٦٥٠ \end{bmatrix}$ وهي من الرتبة ٢ × ٣

ب) مجموع مدخلات العمود الثاني يمثل انتاج فرع طولكرم

السؤال الثاني:

١) المصفوفة أ من الرتبة ٤ × ٣

٢) أ$_{٣١}$ + أ$_{١٢}$ = − ٤ + ٦ = ٢

٣) بما أن (أ$_{٢٣}$)^{٣} = ٢٧ ، فإن (− س)^{٣} = ٢٧ ومنه س = − ٣

السؤال الثالث:

بما أن $\begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ ٥ & ١+س^{٢} \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} ٢ & ١٠ \\ ٥ & س-١ \end{bmatrix}$ فإن :

س^{٢} + ١ = ١٠ ومنها س = ± ٣ ، وكذلك س − ١ = ٢ ، ومنه س = ٣ ، أي س = ٣ فقط .

السؤال الرابع

نفرض المصفوفة ب مصفوفةً مربعةً من الرتبة ٢ فتكون مدخلاتها على

النحو $أ_{يهـ} = ٢^{ي-هـ}$ أي أن $ب = \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ \frac{١}{٢} & ٢ \end{bmatrix}$

السؤال الخامس:

$أ = \begin{bmatrix} ٢- & ٥ & ١ \\ ٦ & ٣- & ٥ \end{bmatrix}$ ، فتكون المصفوفة ب من الرتبة ٣×٢ومدخلاتها على

النحو $أ_{يهـ} = ب_{هـي}$ لجميع قيم ي ، هـ

$$ب = \begin{bmatrix} ٢- & ٦ \\ ٥ & ٣- \\ ١ & ٥ \end{bmatrix}$$

تدريبات صفحة ١٠٢ :

التدريب الأول: أ)

$$ب + ٢أ = \begin{bmatrix} ٤- & ١ & ٦ \\ ٢ & ٥ & ٨ \end{bmatrix} + ٢\begin{bmatrix} ٢ & ٣- & ٥ \\ ١ & ٦ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٥- & ١٦ \\ ٤ & ١٧ & ١٢ \end{bmatrix}$$

$$٣أ - ٢ب = ٣\begin{bmatrix} ٢ & ٣- & ١ \\ ١ & ٦ & ٢ \end{bmatrix} - ٢\begin{bmatrix} ٤- & ١ & ٦ \\ ٢ & ٥ & ٨ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٤ & ١١- & ٣ \\ ١- & ٨ & ١٠- \end{bmatrix}$$

ب) $جـ + ٤ = ص$

$$= \begin{bmatrix} ٤- & ١ \\ ٢ & ٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ١ & ٥ \\ ٥ & ٢- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٩ \\ ٩ & ٠ \end{bmatrix} = ٩ = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} = ٩م_{٢}$$

التدريب الثاني:

$$٢\begin{bmatrix} ١ & ٥- \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix} - ٣س = س + م_{٢}$$

ومنها $٢\begin{bmatrix} ١ & ٥- \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix} - م_{٢} = ٤س$ أي أن $٤س = \begin{bmatrix} ٢ & ١٠- \\ ٤ & ١٠ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ١٠- \\ ٣ & ١٠ \end{bmatrix}$

$$س = \frac{١}{٤}\begin{bmatrix} ١ & ١٠- \\ ٣ & ١٠ \end{bmatrix}$$

التدريب الثالث:

نفرض ان $أ = \begin{bmatrix} هـ & و \\ ع & ل \end{bmatrix}$ فيكون $\begin{bmatrix} ٢هـ & ٢و \\ ٢ع & ٢ل \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٢ & ٥- \\ ١ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$

شركة الرائد للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبدالرحمن شلبي
00970568-952714

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -1 \\ \frac{-3}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix} = \text{أ} \text{ أي أن } \frac{-3}{2} = \text{د}، \frac{-1}{2} = \text{ع}، \frac{5}{2} = \text{و}، -1 = \text{هـ} \text{ ومنها}$$

التدريب الرابع: $\text{س} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + \text{ص} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \\ -3 \end{bmatrix}$ أي أن $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3\text{س} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3\text{ص} \\ 5\text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \\ -3 \end{bmatrix}$

ومنها $\text{ص} = 3$ ، $\text{س} = -6$

التدريب الخامس:

$$\text{س} + 2\text{ص} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -11 & -2 \end{bmatrix} \qquad 3\text{س} - \text{ص} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -5 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\text{س} + 2\text{ص} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -11 & -2 \end{bmatrix}$$

$$6\text{س} - 2\text{ص} = \begin{bmatrix} -10 & 6 \\ -10 & 16 \end{bmatrix} \text{ وبحل المعادلتين ينتج } 7\text{س} = \begin{bmatrix} -7 & 7 \\ -21 & 14 \end{bmatrix} \text{ أي أن}$$

$$\text{س} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}، \text{ص} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$$

تمارين (٣ – ٢) صفحة ١٠٧

السؤال الأول:

أ) $\text{ب}_{4\times5}$ ب) $\text{ب}_{5\times3}$

السؤال الثاني: أ) $\text{أ}.\text{ب} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 \\ 4 & 0 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 & 24 & 27 \\ -6 & -12 & 11 \end{bmatrix}$

ب) $\text{جـ}.\text{ب} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 & -2 \\ 4 & 0 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 6 & -30 \\ 35 & 18 & 29 \\ 18 & 12 & 10 \end{bmatrix}$

شبكة الرائد للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبدالرحمن شلبي
00970568-952714

ج) $أ^{٢} = \begin{bmatrix} ٥ & ٤ \\ ١ & -٢ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٥ & ٤ \\ ١ & -٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢٥ & ٦ \\ -٩ & -١٠ \end{bmatrix}$

السؤال الثالث:

$$\begin{bmatrix} ٦٤ & ٢٠ \\ -٣٤ & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣+٤س+٢٥ & ١٨+س ص+٤٠ \\ -٦+٤ص+-١٦ & ٥ \end{bmatrix}$$

من تساوي مصفوفتين ينتج أن:

$٣+٤س+٢٥ = ٢٠$ ، $-٦+٤ص+-١٦ = -٣٤$

$٤س+٢٨ = ٢٠$

$٤س = -٨$

$س = -٢$

$٤ص+-٢٢ = -٣٤$

$٤ص = -١٢$

$ص = -٣$

السؤال الرابع: $س = [٢ \quad ٣ \quad -١]\begin{bmatrix} ٥ & ٤ \\ ٢ & ١ \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٦ & ٢ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix}$

$$س = [١١ \quad ١٣]\begin{bmatrix} ٦ & ٢ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix} = [٤٠ \quad ٣٥] = ٥[٨ \quad ٧] = ٥ص$$

السؤال الخامس: **إذا كانت** $أ = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ٤ & ١ \end{bmatrix}$، **فبيّن أن:** $أ^{٢} - ب^{٢} \neq (أ-ب)(أ+ب)$

الحل:

$$أ^{٢} - ب^{٢} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ٤ & ١ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ٤ & ١ \end{bmatrix}$$

$$أ^{٢} - ب^{٢} = \begin{bmatrix} ٦ & ٣ \\ ١٨ & ٣ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٥ & ٤ \\ ٩ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١ & ١ \\ -٩ & -٣ \end{bmatrix} \quad \text{------(١)}$$

$$(أ-ب)(أ+ب) = \left(\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ٤ & ١ \end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ٤ & ١ \end{bmatrix}\right)$$

$$= \left(\begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ ٧ & ١ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -١ & ٣ \\ -١ & -١ \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ -١٠ & -٢ \end{bmatrix} \quad \text{-----(٢)}$$

من (١)، (٢) ينتج أن:

$أ^{٢} - ب^{٢} \neq (أ-ب)(أ+ب)$

السؤال السادس:

اذا كانت $أ^{٢} = ب \Leftarrow \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س^{٢} & ٠ \\ ١ & س + ١ \end{bmatrix}$

فإن $س^{٢} = ١$ وبالتالي $س = \pm ١$

أو $س + ١ = ٥$ ومنها $س = ٤$

بالتعويض لا توجد أي قيمة لـ س تحقق أن: $أ^{٢} = ب$

مجموعة الحل $= \varnothing$

السؤال السابع: $أ = \begin{bmatrix} ٢ \\ -٣ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ، $جـ = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ -١ & \frac{٣}{٢} \end{bmatrix}$

أ) نفرض $ء = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix}$

$أ + ء = ب \cdot ء \Leftarrow \begin{bmatrix} ٢ \\ -٣ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix}$

ومنها $\begin{bmatrix} ٢ + س \\ -٣ + ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣س + ٢ص \\ س \end{bmatrix}$

ومن تساوي مصفوفتين:

$٢ + س = ٣س + ٢ص$ ، $-٣ + ص = س$

$س + ص = ١$ ، $-س + ص = ٣$

وبحل المعادلتين بالجمع ينتج أن:

$٢ص = ٤ \Leftarrow ص = ٢$

وبالتعويض $س = -١$ ومنها $ء = \begin{bmatrix} -١ \\ ٢ \end{bmatrix}$

ب) $م = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ -١ & \frac{٣}{٢} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ -١ & \frac{٣}{٢} \end{bmatrix}$ ، $جـ^{٣} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ -١ & \frac{٣}{٢} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ -١ & \frac{٣}{٢} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ -١ & \frac{٣}{٢} \end{bmatrix}$

تمارين (٣ – ٣) صفحة ١١٣

السؤال الأول :جد قيمة كل من المحددات الآتية :

أ):
$$\begin{vmatrix} ٢ & ٣ & -٤ \\ ١ & ٥ & ٦ \\ ٢ & ٣ & -٤ \end{vmatrix} = -٤\begin{vmatrix} ١ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{vmatrix} - ٣\begin{vmatrix} ١ & ٦ \\ ٢ & -٤ \end{vmatrix} + ٢\begin{vmatrix} ٥ & ٦ \\ ٣ & -٤ \end{vmatrix}$$
$$= -٢٨ - ٤٨ + ٧٦ = ٠$$

ب) $\begin{vmatrix} -٤ & ٢ \\ ٨ & ٤ \end{vmatrix} = -١٦ + ٤٨ = ٣٢$

حـ) $|٥م_{٣}| = ٥^{٣}|م_{٣}| = ١٢٥(١) = ١٢٥$

السؤال الثاني : بما أن $\begin{vmatrix} ٣ & -١ & ٢ \\ ٥ & س & ٤ \\ ٣ & ٦ & ١ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} س & -١ \\ ١ & س \end{vmatrix}$

$$٢\begin{vmatrix} س & ٥ \\ ٦ & ٣ \end{vmatrix} - (-١)\begin{vmatrix} ٤ & ٥ \\ ١ & ٣ \end{vmatrix} + ٣\begin{vmatrix} ٤ & س \\ ١ & ٦ \end{vmatrix} = س^{٢} + ١$$
$$\Leftarrow ٦س - ٦٠ + ٧ + ٧٢ - ٣س = س^{٢} + ١$$
$$س^{٢} - ٣س - ١٨ = ٠$$
$$(س + ٣)(س - ٦) = ٠$$
$$س = ٦ ، -٣$$

السؤال الثالث

$$|م^{٣}| = ٩|م| = ٥٤ \Leftarrow |م| = ٦$$

$$|ب.م| = |م|.|ب| = -١٢$$

$$\Leftarrow ٦|ب| = -١٢ \Leftarrow |ب| = -٢$$

$$|٢م| + |٥ب| = ٤|م| + ٢٥|ب| = ٢٤ - ٥٠ = -٢٦$$

السؤال الرابع : إذا كانت $م = \begin{bmatrix} س & ٢ \\ ٢ & س \end{bmatrix}$ **، وكان** $|م^{٣}| = ١٢٥$ **، فما قيمة/ قيم س؟**

الحل: $|م^{٣}| = ١٢٥ \Leftarrow |م|^{٣} = ١٢٥ \Leftarrow |م| = ٥$

$|م| = \begin{vmatrix} س & ٢ \\ ٢ & س \end{vmatrix} = س^{٢} - ٤ = ٥$ أي أن $س^{٢} = ٩$ ومنها $س = \pm ٣$

شركة الراتب للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبدالرحمن شقير
00970568-952714

السؤال الخامس : لمعرفة معادلة المستقيم المار بالنقطتين (٢،٣)، (٥، ٧).
نقوم بايجاد المحدد عن طريق مدخلات العمود الثالث:

$$\begin{vmatrix} س & ص & ١ \\ ٣ & ٢ & ١ \\ ٥ & ٧ & ١ \end{vmatrix} = ٠ \Leftarrow ١ \begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ٥ & ٧ \end{vmatrix} + ١^{-} \begin{vmatrix} س & ص \\ ٥ & ٧ \end{vmatrix} + ١ \begin{vmatrix} س & ص \\ ٣ & ٢ \end{vmatrix} = ٠$$

$$٠ = ٣ص - ٢س + ٥ص - ٧س - ١١$$

$$٠ = ١١ + ٢ص - ٥س \Leftarrow$$

أو

$$\begin{vmatrix} س & ص & ١ \\ ٣ & ٢ & ١ \\ ٥ & ٧ & ١ \end{vmatrix} = ٠ \Leftarrow س \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٧ & ١ \end{vmatrix} + ص^{-} \begin{vmatrix} ٣ & ١ \\ ٥ & ١ \end{vmatrix} + ١ \begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ٥ & ٧ \end{vmatrix} = ٠$$

$$٠ = ١١ + ٢ص - ٥س \Leftarrow$$

السؤال السادس :

أ) أ) $\begin{vmatrix} ٢ & ٤^{-} \\ ٥ & ٢ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٢ & ٤^{-} \\ ١ & ١٠ \end{vmatrix}$ ضرب الصف الأول في (-٢) وإضافته للصف الثاني أي -٢ ص١+ص٢

ب) $\begin{vmatrix} ٢ & ٦ \\ ٥ & ١٥ \end{vmatrix} = ٠$ إخراج عامل مشترك من كل من الصفين الأول والثاني فتتساوى المدخلات المتناظرة في الصفين فتصبح قيمته صفرا.

ج) $\begin{vmatrix} ٧ & ٦ \\ ٩ & ١١ \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} ٦ & ٧ \\ ١١ & ٩ \end{vmatrix}$ (تبديل عمود مكان عمود فإن قيمة المحدد تضرب بـ (-١))

السؤال السابع :

أ) $\begin{vmatrix} ب+جـ & أ & ١ \\ أ+ب & جـ & ١ \\ أ+جـ & ب & ١ \end{vmatrix} = ٠$

بجمع العمودين الأول والثاني

$$\begin{vmatrix} ب+جـ+أ & أ & ١ \\ أ+ب+جـ & جـ & ١ \\ أ+جـ+ب & ب & ١ \end{vmatrix} \xleftarrow{ع_٢+ع_١}$$ وبأخذ (أ + ب + جـ) عامل مشترك من ع١ ينتج أن:

$$= \begin{vmatrix} ١ & أ & ١ \\ ١ & جـ & ١ \\ ١ & ب & ١ \end{vmatrix} = ٠$$ لأن به ع١ =ع٣

ب) $$\begin{vmatrix} ٥ & ٢ & ١١ \\ ٠ & -٤ & ٩ \\ ٠ & ٠ & ١٠ \end{vmatrix} = -٢٠٠$$

بما أن المصفوفة هي مصفوفة مثلثية علوية فإن محددها يساوي حاصل ضرب المدخلات على القطر الرئيسي = ٥ × $^{-}$٤ × ١٠ = $^{-}$٢٠٠

تمارين(٣ ـ ٤) صفحة ١١٩

السؤال لأول $$أ = \begin{bmatrix} ٤ & ^{-}٨ \\ ٣ & ٦ \end{bmatrix}$$: |أ| = ٢٤ + ٢٤ = ٤٨ ≠ ٠ لها نظير ضربي.

$$ب = \begin{bmatrix} جاس & ٣ \\ ^{-}١ & ١ \end{bmatrix}$$ |ب| =جاس + ٣ ≠ ٠ لها نظير ضربي.

$$جـ = \begin{bmatrix} ٣ & ٣ \\ ٣ & ٣ \end{bmatrix}$$ |جـ| = ٩ − ٩ = ٠ ليس لها نظير ضربي.

$$د = \begin{bmatrix} ٢ & ^{-}١ & ٣ \\ ٦ & ^{-}٣ & ٩ \\ ٢ & ٧ & ^{-}١ \end{bmatrix}$$ |د| = ٢(٣ − ٦٣) + ١(١٨ − $^{-}$٦) + ٣(٤٢ + ٦) = $^{-}$١٢٠ + ٢٤ + ١٢٤ = ٠

ليس لها نظير ضربي.

السؤال الثاني: $$أ = \begin{bmatrix} ك & ك \\ ٤ & ٢ك \end{bmatrix}$$ $$ب = \begin{bmatrix} ك & ٤ \\ ١ & ك \end{bmatrix}$$

بما أن أ مصفوفة منفردة اذن محددها يساوي صفرا.

$$|أ| = \begin{vmatrix} ك & ك \\ ٤ & ٢ك \end{vmatrix} = ٢ك^{٢} - ٤ك = ٠$$

ك(٢ك − ٤) = ٠ ⇐ ك = ٠ ، ٢

شركة الراتب للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبدالرحمن شقير
00970568-952714

وبما أن ب مصفوفة منفردة اذن محددها يساوي صفرا. $|ب| = \begin{vmatrix} ك & ٤ \\ ١ & ك \end{vmatrix} = ٠$

$ك^{٢} - ٤ = ٠ \Leftarrow ك = \pm ٢$

السؤال الثالث: $أ = \begin{bmatrix} ٥ & ٤ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$ ،

$$|أ| = \begin{vmatrix} ٥ & ٤ \\ ٣ & ٢ \end{vmatrix} = ٥ \times ٢ - ٣ \times ٤ = ٢$$

$$أ^{-١} = \frac{١}{٢} \begin{bmatrix} ٥- & ٣ \\ ٤ & ٢- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{٥-}{٢} & \frac{٣}{٢} \\ ٢ & ١- \end{bmatrix}$$

$$|أ^{-١}| = \begin{vmatrix} \frac{٥-}{٢} & \frac{٣}{٢} \\ ٢ & ١- \end{vmatrix} = ٣ - \frac{٥}{٢} = \frac{١}{٢}$$

$$(أ^{-١})^{-١} = ٢ \begin{bmatrix} \frac{٥}{٢} & ٢ \\ \frac{٣}{٢} & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ & ٤ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix} = أ$$

السؤال الرابع : $أ = \begin{bmatrix} س & ٥ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$ ، $|أ^{-١}| = \frac{١}{٥}$

$$|أ| = \frac{١}{|أ^{-١}|} \Leftarrow |أ| = ٥$$

$٣ س - ١٠ = ٥ \Leftarrow ٣ س = ١٥ \Leftarrow س = ٥$

السؤال الخامس: $أ = \begin{bmatrix} س & ٣^{-} \\ ١ & ص \end{bmatrix}$ ، $|أ^{-١}| = |\ أ\ |$

بما أن: $|أ| = \frac{١}{|أ^{-١}|} \Leftarrow |أ| \times |أ^{-١}| = ١$

لكن $|أ| = |أ^{-١}| \Leftarrow |أ| . |أ| = ١ \Leftarrow |أ|^{٢} = ١$

بما أن: $|أ| = س ص + ٣$ **إذن** $(س ص + ٣)^{٢} = ١$

إما $س ص + ٣ = ١ \Leftarrow س ص = ٢^{-}$

أو $س ص + ٣ = ١^{-} \Leftarrow س ص = ٤^{-}$

شركة الراتب للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبدالرحمن شقير
00970568-952714

السؤال السادس : $أ = \begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$ ، $أ.جـ = ب$.

$|أ| = ١ \times ٢ - ٤ \times ٣ = -١٠ \neq ٠$

الحل: $أ^{-١} = \frac{١}{-١٠} \begin{bmatrix} -٣ & ٢ \\ ١ & -٤ \end{bmatrix}$

$أ.جـ = ب \Leftarrow$ أ غير منفردة

$أ^{-١}.أ.جـ = أ^{-١}.ب$

$جـ = أ^{-١}.ب$

$جـ^{-١} = (أ^{-١}.ب)^{-١} = ب^{-١}.أ$

$جـ^{-١} = ب^{-١}.أ = \begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٣ & -٤ \\ -٢ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٦ & ٨ \\ -٥ & ٥ \end{bmatrix}$

السؤال السابع : بما أن $أ.ب = أ.جـ$ ، بما أن $أ$ غير منفردة ، فإن $أ^{-١}$ موجودة

$أ.ب = أ.جـ \Leftarrow أ^{-١}.أ.ب = أ^{-١}.أ.جـ$

$ب = جـ \Leftarrow ب.أ = جـ.أ$

تمارين (٣ ـ ٥) صفحة ١٢٥

السؤال الأول

أ) $س - ص = ٣$

$٢س + ص = ٦$

$\begin{bmatrix} ١ & -١ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ \\ ٦ \end{bmatrix}$

$|أ| = ١ \times ١ - ٢ \times -١ = ٣ \neq ٠$

$أ^{-١} = \frac{١}{٣} \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & -٢ \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \frac{١}{٣} \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & -٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٣ \\ ٦ \end{bmatrix} = \frac{١}{٣} \begin{bmatrix} ٩ \\ ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ \\ ٠ \end{bmatrix}$

ومنها س= ٣، ص = ٠

ب) $س + ص = ٢$ ، $١٠س + ص = ١١$

شركة الراتب للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبدالرحمن عقيل
00970568-952714

$$\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ١٠ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ \\ ١١ \end{bmatrix}$$

$$|أ| = \begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ١٠ \end{vmatrix} = -٩ \quad \text{فتكون} \quad أ^{-١} = \begin{bmatrix} \frac{١}{٩} & \frac{-١}{٩} \\ \frac{-١}{٩} & \frac{١٠}{٩} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{١}{٩} & \frac{-١}{٩} \\ \frac{-١}{٩} & \frac{١٠}{٩} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ٢ \\ ١١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{١}{٩} & \frac{-١}{٩} \\ \frac{-١}{٩} & \frac{١٠}{٩} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ١٠ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ \\ ١ \end{bmatrix} \quad \text{ومنه} \; س = ١ \; ، \; ص = ١$$

السؤال الثاني :

أ) $س - ص = ٥$

$س + ٢ص = ٢$

$$أ = \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix} \Leftarrow |أ| = ٢ + ١ = ٣ \; ، \; |أ_{س}| = \begin{vmatrix} ٥ & ١ \\ ٢ & ٢ \end{vmatrix} = ١٠ + ٢ = ١٢$$

$$|أ_{ص}| = \begin{vmatrix} ١ & ٥ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix} = ٢ - ٥ = -٣$$

$$س = \frac{|أ_{س}|}{|أ|} = \frac{١٢}{٣} = ٤ \quad ، \quad ص = \frac{|أ_{ص}|}{|أ|} = \frac{-٣}{٣} = -١$$

ب) $س + ص = -٣$ ،

$٢ص + س = -٢$

$$\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٣ \\ -٢ \end{bmatrix}$$

$$|أ| = \begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} = ١ \quad ، \quad |أ_{س}| = \begin{vmatrix} -٣ & ١ \\ -٢ & ١ \end{vmatrix} = -٤ \quad ، \quad |أ_{ص}| = \begin{vmatrix} ١ & -٣ \\ ١ & -٢ \end{vmatrix} = ١$$

$$س = \frac{|أ_{س}|}{|أ|} = \frac{-٤}{١} = -٤ \quad ، \quad ص = \frac{|أ_{ص}|}{|أ|} = \frac{١}{١} = ١$$

السؤال الثالث : $|أ| = \begin{vmatrix} ٢ & ٣- \\ ١- & ١ \end{vmatrix}$ ، $|أ_س| = \begin{vmatrix} ٥ & ٣- \\ ٣- & ١ \end{vmatrix}$ ،

$|أ| = \begin{vmatrix} ٢ & ٣- \\ ١- & ١ \end{vmatrix} = -١$ ، $|أ_س| = \begin{vmatrix} ٥ & ٣- \\ ٣- & ١ \end{vmatrix} = -٤$ ، $|أ_ص| = \begin{vmatrix} ٢ & ٥ \\ ١- & ٣- \end{vmatrix} = -١$

$س = \frac{|أ_س|}{|أ|} = \frac{-٤}{-١} = ٤$ ، $ص = \frac{|أ_ص|}{|أ|} = \frac{-١}{-١} = ١$

السؤال الرابع :

أ) $٣س - ص = ١$ ، $س + ٢ص = ٥$

المصفوفة الممتدة للنظام هي $أ = \left[\begin{array}{cc|c} ٣ & ١- & ١ \\ ١ & ٢ & ٥ \end{array}\right]$ **ونجري العمليات على النحو الآتي:**

$$\left[\begin{array}{cc|c} ٣ & ١- & ١ \\ ١ & ٢ & ٥ \end{array}\right] \xleftarrow{\frac{١}{٣}ص_١} \left[\begin{array}{cc|c} ١ & \frac{١}{٣}- & \frac{١}{٣} \\ ١ & ٢ & ٥ \end{array}\right] \xleftarrow{-ص_١ + ص_٢} \left[\begin{array}{cc|c} ١ & \frac{١}{٣}- & \frac{١}{٣} \\ ٠ & \frac{٧}{٣} & \frac{١٤}{٣} \end{array}\right]$$

$$\xleftarrow{\frac{٣}{٧}ص_٢} \left[\begin{array}{cc|c} ١ & \frac{١}{٣}- & \frac{١}{٣} \\ ٠ & ١ & ٢ \end{array}\right]$$

ومنها تكون $ص = ٢$ ، **وبالتعويض العكسي** $س - \frac{١}{٣}(٢) = \frac{١}{٣} \Leftarrow س = ١$

ب) $س - ص + ع = ٦$ ، $س + ٢ص + ع = ٣$ ، $٢س + ص - ع = ٠$

نكون المصفوفة الممتدة $أ = \left[\begin{array}{ccc|c} ١ & ١- & ١ & ٦ \\ ١ & ٢ & ١ & ٣ \\ ٢ & ١ & ١- & ٠ \end{array}\right]$ **ونجري العمليات الآتية:**

$$\left[\begin{array}{ccc|c} ١ & ١- & ١ & ٦ \\ ١ & ٢ & ١ & ٣ \\ ٢ & ١ & ١- & ٠ \end{array}\right] \xleftarrow[-٢ص_١ + ص_٣]{-ص_١ + ص_٢} \left[\begin{array}{ccc|c} ١ & ١- & ١ & ٦ \\ ٠ & ٣ & ٠ & ٣- \\ ٠ & ٣ & ٠ & ١٢- \end{array}\right]$$

$$\xleftarrow{\frac{١}{٣}ص_٢} \left[\begin{array}{ccc|c} ١ & ١- & ١ & ٦ \\ ٠ & ١ & ٠ & ١- \\ ٠ & ٣ & ٠ & ٩- \end{array}\right] \xleftarrow{-٣ص_٢ + ص_٣} \left[\begin{array}{ccc|c} ١ & ١- & ١ & ٦ \\ ٠ & ١ & ٠ & ١- \\ ٠ & ٠ & ٠ & ٠ \end{array}\right]$$

شبكة الرائد للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبدالرحمن شلبي
00970568-952714

ومنها -٣ ع=-٩ ومنها ع= ٣
وبالتعويض العكسي: ص=-١
س+ ١+٣ =٦ ومنها س =٢

تمارين عامة(الوحدة الثالثة) صفحة ١٢٦

السؤال الأول (الموضوعي)

رقم الفقرة	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
رمز الإجابة	جـ	جـ	جـ	ء	أ	ب	ء	ب	ء	أ

السؤال الثاني:

بما أن $\begin{vmatrix} س & ١ \\ ص & ٢ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ص & ١^- \\ س & ٤^- \end{vmatrix} = ٧$ ، فإن

$$\begin{vmatrix} س & ١ \\ ص & ٢ \end{vmatrix} = ٧ \Leftarrow ٢س - ص = ٧$$

$$\begin{vmatrix} ص & ١^- \\ س & ٤^- \end{vmatrix} = ٧ \Leftarrow -س + ٤ص = ٧$$

وبحل المعادلتين معاً ينتج أن:
س=٥، ص=٣

السؤال الثالث : $أ = \begin{bmatrix} ٥ & ٣^- \\ ٤ & ٢^- \end{bmatrix}$

$$|أ| = ١٠ + ١٢^- = ٢^- \neq ٠$$

$$أ^{-١} = \frac{١}{٢^-} \begin{bmatrix} ٥^- & ٤ \\ ٣^- & ٢ \end{bmatrix}$$

أ) $|أ| . أ^{-١} = ٢^- . \frac{١}{٢^-} \begin{bmatrix} ٥^- & ٤ \\ ٣^- & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥^- & ٤ \\ ٣^- & ٢ \end{bmatrix}$

ب) $|أ٣| = |أ| ٩ = ٩ \times ٢^- = ١٨^-$

شركة الرائد للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبدالرحمن شقير
00970568-952714

جـ) $(-٢|)^{-١} = |^{-١}\frac{١}{٢^{-}} = \begin{bmatrix} ٤ & ٥^{-} \\ ٢ & ٣^{-} \end{bmatrix}\frac{١}{٢^{-}}.\frac{١}{٢^{-}} = \begin{bmatrix} ١ & \frac{٥^{-}}{٤} \\ \frac{١}{٢} & \frac{٣^{-}}{٤} \end{bmatrix}$

السؤال الرابع : لإيجاد قيم س التي تجعل $\begin{vmatrix} ١ & س & ٢ \\ س & ٣ & س \\ ٤ & س & ٥ \end{vmatrix} = -٩$.

فإن : $\begin{vmatrix} ١ & س & ٢ \\ س & ٣ & س \\ ٤ & س & ٥ \end{vmatrix} = -٩ \Leftarrow ١\begin{vmatrix} ٣ & س \\ س & ٥ \end{vmatrix} + س^{-}\begin{vmatrix} س & س \\ ٤ & ٥ \end{vmatrix} + ٢\begin{vmatrix} س & ٣ \\ س & ٤ \end{vmatrix} = -٩$

$\Leftarrow ١٥ - س^{٢} - س(س) + ٢(١٢ - س^{٢}) = -٩$

$\Leftarrow ١٥ - س^{٢} - س^{٢} + ٢س^{٢} - ٢٤ = -٩$

إذن ـ٩ = ـ٩ وهذا يعني أن: س هي أي عدد حقيقي.

السؤال الخامس :

أ) لحل المعادلة المصفوفية $\begin{bmatrix} ٣ \\ ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$ (باستخدام النظير الضربي)

فإن :

$|أ| = ٤ - ٦ = ٢^{-} \neq ٠$

$أ^{-١} = \frac{١}{٢^{-}}\begin{bmatrix} ٤ & ٢^{-} \\ ٣^{-} & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٢^{-} \\ \frac{١}{٢^{-}} & \frac{٣}{٢} \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \frac{١}{٢^{-}}\begin{bmatrix} ٤ & ٢^{-} \\ ٣^{-} & ١ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٣ \\ ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٢^{-} \\ \frac{١}{٢^{-}} & \frac{٣}{٢} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٣ \\ ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥^{-} \\ ٤ \end{bmatrix}$

ومنها س= ـ٥، ص = ٤

ب) لحل المعادلة المصفوفية

$\begin{bmatrix} س & ص \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} ٣ & ١^{-} & ١ \\ ٤ & ٠ & ٢ \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} ٠ & ٣ \\ ٢^{-} & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ٣- & ١١ \end{bmatrix}$

فإن:

شركة الراتب للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبدالرحمن شقير
00970568-952714

لتحميل المزيد من الملفات زورونا على موقع المكتبة الفلسطينية الشاملة

$$[\text{س} \quad \text{ص}] \cdot \begin{bmatrix} ٣ & -٣ & ٩ \\ -٤ & ٠ & -٨ \end{bmatrix} = [٤ \quad -٣ \quad ١١]$$

$$[٣\text{س} - ٤\text{ص} \quad -٣\text{س} \quad ٩\text{س} - ٨\text{ص}] = [٤ \quad -٣ \quad ١١]$$

$$-٣\text{س} = -٣ \Leftarrow \text{س} = ١$$

$$٣\text{س} - ٤\text{ص} = ٤ \Leftarrow ٣ - ٤\text{ص} = ٤ \Leftarrow \text{ص} = \frac{-١}{٤}$$

السؤال السادس : $\text{أ} = \begin{bmatrix} \text{س} & ٣ \\ ٥ & ٤ \end{bmatrix}$ ، $\text{أ}^{-١} = \begin{bmatrix} \text{ص} & ٤ \\ -٥ & ٤ \end{bmatrix}$

بما أن: $\text{أ} \cdot \text{أ}^{-١} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} \text{س} & ٣ \\ ٥ & ٤ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{ص} & ٤ \\ -٥ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤\text{س} - ١٥ & ٠ \\ \text{س}\text{ص} + ١٢ & -٥\text{ص} + ١٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

ومنها $٤\text{س} - ١٥ = ١ \Leftarrow \text{س} = ٤$

$-٥\text{ص} + ١٦ = ١ \Leftarrow \text{ص} = -٣$

السؤال السابع : $\text{أ} \times \text{ب} = \text{و}$ ،

نفرض أن : كلا من المصفوفتين لها نظير ضربي وليكن $\text{أ}^{-١}$ ، $\text{ب}^{-١}$

بما أن : $\text{أ} \times \text{ب} = \text{و} \Leftarrow \text{أ}^{-١}(\text{أ}\cdot\text{ب}) = \text{أ}^{-١}\cdot\text{و} = \text{و}$

أي أن $(\text{أ}^{-١}\cdot\text{أ})\cdot\text{ب} = \text{م}\cdot\text{ب} = \text{و}$

كما أن $(\text{أ}\cdot\text{ب})\cdot\text{ب}^{-١} = \text{و}\cdot\text{ب}^{-١} = \text{و}$ **ونستنتج أن** $\text{أ} = \text{و}$

وهذا يناقض الفرض بأن إحدى المصفوفتين على الأقل منفردة .

السؤال الثامن :

أ) $\text{أ} = \begin{bmatrix} -١ & \text{ن} \\ ١ & \text{ك} \end{bmatrix}$ ، $|\text{أ}_{\text{س}}| = \begin{vmatrix} -١ & ٥ \\ ١ & ٣ \end{vmatrix}$ ، $|\text{أ}_{\text{ص}}| = \begin{vmatrix} ٥ & \text{ن} \\ ٣ & \text{ك} \end{vmatrix}$

$$\text{ومنها } \text{ن} = ٦ \text{ ، ك} = ٢ \Leftarrow |\text{أ}| = \begin{vmatrix} -١ & ٦ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix} = ٦ + ٢ = ٨$$

شركة الراتب للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبدالرحمن شقير
00970568-952714

ب) $س = \frac{|أ_{س}|}{|أ|} = \frac{٨}{٨} = ١$ ، $ص = \frac{|أ_{ص}|}{|أ|} = \frac{٨}{٨} = ١$

السؤال التاسع :

$$|أ^{-١}| = \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ١ & ٣ \end{vmatrix} = ٣ - ٢ = ١ \Leftarrow أ = \begin{bmatrix} ٣ & ٢^{-} \\ ١^{-} & ١ \end{bmatrix}$$

$$أ^{٢} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢^{-} \\ ١^{-} & ١ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٣ & ٢^{-} \\ ١^{-} & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١١ & ٨^{-} \\ ٤^{-} & ٣ \end{bmatrix}$$

$$|أ^{٢}| = ٣٣ - ٣٢ = ١ \Leftarrow (أ^{٢})^{-١} = \begin{bmatrix} ٣ & ٨ \\ ٤ & ١١ \end{bmatrix}$$

$$(أ^{-١})^{٢} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٨ \\ ٤ & ١١ \end{bmatrix}$$ **ألاحظ أن:** $(أ^{٢})^{-١} = (أ^{-١})^{٢}$

السؤال العاشر : لحل المعادلتين بطريقة كريمر : ٣س+ ٢ ص= -٤ ، ٥ ص + س = ٣(نرتب أولا)

$$أ = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ٥ \end{bmatrix} \Leftarrow |أ| = ١٥ - ٢ = ١٣$$

$$|أ_{س}| = \begin{vmatrix} ٤^{-} & ٢ \\ ٣ & ٥ \end{vmatrix} = ٢٠^{-} - ٦ = ٢٦^{-} \quad س = \frac{|أ_{س}|}{|أ|} = \frac{٢٦^{-}}{١٣} = -٢$$

$$|أ_{ص}| = \begin{vmatrix} ٣ & ٤^{-} \\ ١ & ٣ \end{vmatrix} = ٩ + ٤ = ١٣ \quad ، \quad ص = \frac{|أ_{ص}|}{|أ|} = \frac{١٣}{١٣} = ١$$

السؤال الحادي عشر : لحل النظام الآتي بطريقة جاوس :

$س - ص + ٤ع = ٩$ ، $٢س + ٣ص + ٢ع = ٢$ ، $٣ص + س - ع = ٤^{-}$

نكون المصفوفة ال ممتدة $آ = \left[\begin{array}{ccc|c} ١ & ١^{-} & ٤ & ٩ \\ ٢ & ٣ & ٢ & ٢ \\ ١ & ٣ & ١^{-} & ٤^{-} \end{array}\right]$ **ونجري العمليات الآتية:**

$$\left[\begin{array}{c|ccc} ٩ & ٤ & -١ & ١ \\ ٢ & ٢ & ٣ & ٢ \\ -٤ & -١ & ٣ & ١ \end{array}\right] \xleftarrow[-ص١+ص٣]{-٢ص١+ص٢} \left[\begin{array}{c|ccc} ٩ & ٤ & -١ & ١ \\ -١٦ & -٦ & ٥ & ٠ \\ -١٣ & -٥ & ٤ & ٠ \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{c|ccc} ٩ & ٤ & -١ & ١ \\ \frac{-١٦}{٥} & \frac{-٦}{٥} & ١ & ٠ \\ -١٣ & -٥ & ٤ & ٠ \end{array}\right] \xleftarrow{\frac{١}{٥}ص٢}$$

$$\left[\begin{array}{c|ccc} \frac{٢٩}{٥} & \frac{١٤}{٥} & ٠ & ١ \\ \frac{-١٦}{٥} & \frac{-٦}{٥} & ١ & ٠ \\ \frac{-١}{٥} & \frac{-١}{٥} & ٠ & ٠ \end{array}\right] \xleftarrow[-٤ص٢+ص٣]{ص٢+ص١}$$

ومنها $\frac{-١}{٥}ع = \frac{-١}{٥}$ ومنها ع = ١

وبالتعويض العكسي: ص + $\frac{-٦}{٥}$ ع = $\frac{-١٦}{٥}$ ⇐ ص = -٢

س+ $\frac{١٤}{٥}$ ع = $\frac{٢٩}{٥}$ ⇐ س =٣

السؤال الثاني عشر :

$$\begin{vmatrix} س & ٢ & ١١ \\ ٠ & -٤ & ٩ \\ ٠ & ٠ & \frac{١}{٢}س \end{vmatrix} = -٥٠$$

حسب خصائص المحددات فإن محدد المصفوفة القطرية العلوية يساوي حاصل ضرب مدخلات القطر الرئيسي أي أن $س \times -٤ \times \frac{١}{٢}س = -٥٠$ **ومنها** $س^{٢} = ٢٥$ **أي أن** $س = \pm ٥$

اجابات الفصل الثاني

الفرع العلمي والصناعي

حلول الوحدة الرابعة

تمارين ومسائل (٤-١) صفحة ١٣٦

السؤال الاول

ا) $م(س) = \frac{١}{٣}(٢ + س^{٢})^{\frac{٣}{٢}}$ ، $ن(س) = س\sqrt{٢ + س^{٢}}$

$م'(س) = \frac{١}{٢}(٢ + س^{٢})^{\frac{١}{٢}}(٢س) = س\sqrt{٢ + س^{٢}} = ن(س)$

أي أن $م(س)$ اقتران أصلي للاقتران $ن(س)$

ب) $م(س) = قا^{٣}س$ ، $ن(س) = ٣قا^{٢}س ظاس$

$م'(س) = ٣قا^{٢}س قاس ظاس = ٣قا^{٣}س ظاس \neq ن(س)$

أي أن $م(س)$ ليس اقترانا أصليا للاقتران $ن(س)$

ج) $م(س) = لـو_{هـ}(س^{٣} + هـ^{٢س})$ ، $ن(س) = \frac{٣س^{٢} + ٢هـ^{٢س}}{س^{٣} + هـ^{٢س}}$

$م'(س) = \frac{٣س^{٢} + ٢هـ^{٢س}}{س^{٣} + هـ^{٢س}} = ن(س)$

أي أن $م(س)$ اقتران أصلي للاقتران $ن(س)$

السؤال الثاني:

بما أن $م(س)$ ، $هـ(س)$ اقترانين أصليين فإن $م(٣) - هـ(٣) = جـ$

ومنها $م(٣) - هـ(٣) = ٣ - ٤ = -١ = جـ$

$هـ(س) = س^{٢} - ٤س + ٦ - ١ = س^{٢} - ٤س + ٧$

$هـ(١) = ١ - ٤ + ٧ = ٤$

السؤال الثالث:

$(م - هـ)'(٤) = م'(٤) - هـ'(٤) = ٣ \times ٧ - ٧ = ١٤$

لأن $م'(٤) = هـ'(٤) = ن(٤) = ٧$ حيث $ن(س)$ متصل عند $س = ٤$

السؤال الرابع:

بما أن $م(س)$ هو احد الاقترانات الأصلية للاقتران المتصل $ن(س)$ فإن $م'(س) = ن(س)$

$م'(س) = ٢(قا^{٢}س - قاس ظاس)$

$= ٢(قا^{٢}س - قاس ظاس) = ٢(\frac{١}{جتا^{٢}س} - \frac{جاس}{جتا^{٢}س}) = ٢(\frac{١ - جاس}{جتا^{٢}س})$

$= ٢(\frac{١ - جاس}{جتا^{٢}س}) = ٢(\frac{١ - جاس}{١ - جا^{٢}س}) = ٢(\frac{١ - جاس}{(١ + جاس)(١ - جاس)}) = \frac{٢}{(١ + جاس)} = ن(س)$

ومنها يكون $ا = ٢$

شركة الرائد للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبدالرحمن عقلان
00970568-952714

السؤال الخامس:

$\int$ هـ(س) دس = $أ$ س^{٣} + جـ س **وباشتقاق الطرفين ينتج** هـ(س) = ٣$أ$ س^{٢} + جـ

بما أن هـ(−١) = ٤ **فإن** ٣$أ$ + جـ = ٤ .....(١)

كذلك هـ$'$(س) = ٦$أ$ س ، **وبما أن** هـ$'$(٢) = ٢٤ **فإن** ١٢ $أ$ = ٢٤ .....(٢)

وبحل المعادلتين ينتج أن $أ$ = ٢ ، جـ = −٢

تمارين ومسائل (٤-٢) صفحة ١٤٠

السؤال الأول

أ) $\int$ ٨ دس = ٨س + جـ

ب) $\int$ (٧س^{٢} − ٤س + $\frac{٣}{س^{٤}}$) دس = $\int$ (٧س^{٢} − ٤س + ٣س$^{-٤}$) دس

= $\frac{٧}{٣}$ س^{٣} − ٢س^{٢} + $\frac{-١}{٣س^{٣}}$ + جـ

ج) $\int$ (٣ + س) $\sqrt{س}$ دس = $\int$ (٣س$^{\frac{١}{٢}}$ + س$^{\frac{٣}{٢}}$) دس = ٢س$^{\frac{٣}{٢}}$ + $\frac{٢}{٥}$ س$^{\frac{٥}{٢}}$ + جـ

د) $\int$ (٥س + قاس ظاس) دس = $\frac{٥}{٢}$ س^{٢} + قاس + جـ

هـ) $\int \frac{س - ١}{\sqrt[٣]{س} - ١}$ دس = $\int \frac{(\sqrt[٣]{س} - ١)(س^{\frac{٢}{٣}} + س^{\frac{١}{٣}} + ١)}{\sqrt[٣]{س} - ١}$ دس

= $\frac{٣}{٥}$ س$^{\frac{٥}{٣}}$ + $\frac{٣}{٤}$ س$^{\frac{٤}{٣}}$ + س + جـ

و) $\int \frac{٢س^{٣} + ٥س^{٢} - ١}{س^{٢}}$ دس = $\int$ (٢س + ٥ − س$^{-٢}$) دس = س^{٢} + ٥س + $\frac{١}{س}$ + جـ

ز) $\int \frac{١}{جتا^{٢}س}$ دس = $\int$ قا^{٢}س دس = ظاس + جـ

حـ) $\int$ (٥هـ^{س} + $\frac{٢}{س}$) دس = $\int$ (٥هـ^{س} + ٢س$^{-١}$) دس = ٥هـ^{س} + ٢لـو$_{هـ}$ |س| + جـ

السؤال الثاني:

بتكامل الطرفين $\int$ ن$'$(س) + هـ^{س}) دس = $\int$ جتاس دس

ومنها ن(س) + هـ^{س} = جاس + جـ **أي أن** ن(س) = جاس − هـ^{س} + جـ

وبما أن ن(٠) = −١ **فإن** جـ = ٠ **ومنها** ن(س) = جاس − هـ^{س}

شركة الرائد للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبد الرحمن شقير
00970568-952714

السؤال الثالث:

$\int$ ن(س) دس = جاس − جتاس + ٢ **وباشتقاق الطرفين ينتج أن:**

ن(س) = جتاس + جاس **ومنها** ن´(س) = − جاس + جتاس

ن($\frac{\pi}{٢}$) − ن´($\frac{\pi}{٢}$) = (جتا$\frac{\pi}{٢}$ + جا$\frac{\pi}{٢}$) − (− جا$\frac{\pi}{٢}$ + جتا$\frac{\pi}{٢}$) = ٢ **وهو المطلوب.**

السؤال الرابع:

بما أن $\int$ (ن´(س) + س٢) دس = ٢س٣ + جس٢ + ٢ **فإن**

ن(س) + $\frac{١}{٣}$ س٣ + جـ٢ = ٢س٣ + جس٢ + ٢

ن(س) = $\frac{٥}{٣}$ س٣ + جس٢ + ٢ − جـ٢

ن´(س) = ٥ س٢ + ٢جس

ن´(١) = ٥ + ٢جـ = ٤ **ومنها** جـ = $\frac{-١}{٢}$

ن(س) = $\frac{٥}{٣}$ س٣ − $\frac{١}{٢}$ س٢ + ٢ − جـ٢

لكن ن(٢) = $\frac{٤٠}{٣}$ − ٢ + ٢ − جـ٢ = ٦ **ومنها** جـ٢ = $\frac{٢٢}{٣}$

فيكون ن(س) = $\frac{٥}{٣}$ س٣ − $\frac{١}{٢}$ س٢ − $\frac{١٦}{٣}$ ، ن(−١) = $\frac{-٥}{٣}$ − $\frac{١}{٢}$ − $\frac{١٦}{٣}$ = $\frac{-١٥}{٢}$

شركة الرائد للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبدالرحمن شقير
00970568-952714

تمارين ومسائل (٤-٣) صفحة ١٤٥

السؤال الأول:

ميل المماس = ن´(س) = س(٣س − ٢) = ٣س٢ − ٢س

$\int$ ن´(س) دس = $\int$ (٣س٢ − ٢س) دس **ومنها**

ن(س) = س٣ − س٢ + جـ ، **لكن** ن(٢) = ٥ **فيكون** ٥ = ٨ − ٤ + جـ **ومنها** جـ = ١

فيصبح ن(س) = س٣ − س٢ + ١

السؤال الثاني:

بما أن س + ص = ٤ **هو مماس لمنحنى** ن(س) **عندما** س = ١ **فإن** ن´(١) = −١ **(ميل المماس)**

أي أن ا − ٣ = −١ **ومنها** ا = ٢ **فيصبح** هـ´(س) = ٢س − ٣س٢

$\int$ هـ´(س) = $\int$ (٢س − ٣س٢) دس **ومنها** هـ(س) = س٢ − س٣ + جـ

لكن نقطة التماس هي (١،٣) **ومنها** هـ(س) = س٢ − س٣ + ٣

السؤال الثالث:

ميل المماس $= ن'(س) = ٢\sqrt{س}$

$\int ن'(س) دس = \int ٢\sqrt{س} دس$ **ومنها** $ن(س) = \frac{٢}{٣}س^{\frac{٣}{٢}} + جـ$

وبما أن $ن(٠) = ٠$ **فإن جـ** $= ٠$ ، **كما أن** $ن(١) = ٢$ **فإن** $\frac{٢}{٣} = \sqrt{أ}$ **أي أن** $أ = ٤$

فيصبح $ن(س) = \frac{٢}{٣}س^{٣}$

السؤال الرابع:

$ن'(س) = \int ن''(س) دس = \int جتاس دس = جاس + جـ$

وبما أن $ن'(\pi) = ٢$ **فإن جـ** $= ٢$ **وتصبح** $ن'(س) = جاس + ٢$

كما أن $ن(س) = \int ن'(س) دس = \int (جاس + ٢) دس = -جتاس + ٢س + ء$

لكن $ن(\pi) = ١$ **فيكون** $ن(\pi) = ١ = \pi٢ + ١ + ء$ **ومنها** $ء = -\pi٢$ **فيكون**

$ن(س) = -جتاس + ٢س - \pi٢$

السؤال الخامس:

$ت = \frac{ع}{ن}$ **ومنها** $\int ع دن = \int ن دن$

أي أن $ع = \frac{١}{٢}ن^{٢} + جـ$ **وبما أن سرعته الابتدائية مقدارها٣ م/ ث، فإن جـ** $= ٣$

فيكون $ع = \frac{١}{٢}ن^{٢} + ٣$ ، **ويكون** $ع(٥) = \frac{٢٥}{٢} + ٣ = \frac{٣١}{٢}$ **م/ث**

كما أن $ع = \frac{ف}{ن}$ **ومنها** $ف = \int (\frac{١}{٢}ن^{٢} + ٣) دن$ **وبتكامل الطرفين ينتج:**

$ف = \frac{١}{٦}ن^{٣} + ٣ن + ء$ **وبما أن** $ف(٠) = ٠$ **فيكون** $ف = \frac{١}{٦}ن^{٣} + ٣ن$

$ف(٥) = \frac{١٢٥}{٦} + ١٥ = \frac{٢١٥}{٦}$ **مترا**

السؤال السادس:ميل المماس $= ن'(س) = \left(\frac{١}{\sqrt{س}} + \sqrt{س}\right)$ **ومنها**

$\int ن'(س) دس = \int \left(س^{\frac{١}{٢}} + س^{-\frac{١}{٢}}\right) دس$

وينتج أن $ن(س) = \frac{٢}{٣}س^{\frac{٣}{٢}} + ٢س^{\frac{١}{٢}} + جـ$ **وبما أنه يمر بالنقطة** $(١ ، \frac{٢}{٣})$ **فإن :**

$\frac{٢}{٣} = \frac{٢}{٣} + ٢ + جـ$، **أي أن** $جـ = -٢$ **فيكون** $ن(س) = \frac{٢}{٣}س^{\frac{٣}{٢}} + ٢س^{\frac{١}{٢}} - ٢$

شركة الرائد للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبد الرحمن شاهين
00970568-952714

السؤال السابع:

نفرض ف : ازاحة الجسم عن قمة البرج فيكون ع $= \frac{ف}{ن}$ $= -١٠ن + ٤٠$ **ومنها**

$$ف = \int (-١٠ن + ٤٠) ن$$

أي أن ف $= -٥ن^{٢} + ٤٠ن + ج$، **لكن** ف$(٠) = ٠$

فيكون ف $= -٥ن^{٢} + ٤٠ن$ **وعندما** ف $= -٤٥$ **فإن الجسم يصل الأرض ومنها**

ف $= -٥ن^{٢} + ٤٠ن = -٤٥$ أي أن $٥ن^{٢} - ٤٠ن - ٤٥ = ٠$ **ومنها** ن $= ٩$ **ثانية**

تمارين (٤-٤ أ) صفحة ١٥٠

السؤال الاول:

أ) $$\int \frac{٤}{(س+٢)^{٥}} ds = \int ٤(س+٢)^{-٥} ds = -(س+٢)^{-٤} + ج$$

ب) $$\int (١-س) جا(س^{٢} - ٢س) ds$$

نفرض ص $= (س^{٢} - ٢س)$ **فيكون** $\frac{ds}{ds} = (٢س - ٢)$ **ومنها** $ds = \frac{ds}{(٢س-٢)}$

$$\int (١-س) جا(س^{٢} - ٢س) ds = \int (١-س) جا ص \frac{ds}{٢(س-١)}$$

$$= \frac{-١}{٢} \int جا ص ds = \frac{١}{٢} جتا ص + ج = \frac{١}{٢} جتا(س^{٢} - ٢س) + ج$$

ج) $$\int \frac{لـو_{هـ} س}{س} ds$$

نفرض ص $= لـو_{هـ} س$ **ومنها** $\frac{ds}{ds} = \frac{١}{س}$، **أي أن** $ds = س\, ds$

$$\int \frac{لـو_{هـ} س}{س} ds = \int \frac{ص}{س} س\, ds = \frac{ص^{٢}}{٢} + ج = \frac{(لـو_{هـ} س)^{٢}}{٢} + ج$$

د) $$\int (س^{٢} + ٢) \sqrt{س+١}\, ds$$

نفرض ص $= س + ١$ **فيكون** $ds = ds$ **ويكون**

$$\int (س^{٢} + ٢) \sqrt{س+١}\, ds = \int (ص^{٢} - ٢ص + ٣) ص^{\frac{١}{٢}} ds = \int (ص^{\frac{٥}{٢}} - ٢ص^{\frac{٣}{٢}} + ٣ص^{\frac{١}{٢}}) ds$$

$$= \frac{٢}{٧} ص^{\frac{٧}{٢}} - \frac{٤}{٥} ص^{\frac{٥}{٢}} + ٢ص^{\frac{٣}{٢}} + ج = \frac{٢}{٧}(س+١)^{\frac{٧}{٢}} - \frac{٤}{٥}(س+١)^{\frac{٥}{٢}} + ٢(س+١)^{\frac{٣}{٢}} + ج$$

شركة الرائد للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبدالرحمن شقلية
00970568-952714

هـ) $\int (س+٢)^{٢}(س-١)^{٦}\,ءس$

نفرض ص = س − ١ **فيكون** ءص = ءس

$\int (س+٢)^{٢}(س-١)^{٦}\,ءس = \int (ص+٣)^{٢}ص^{٦}\,ءص$

$= \int (ص^{٨}+٦ص^{٧}+٩ص^{٦})ءص = \frac{ص^{٩}}{٩}+\frac{٦ص^{٨}}{٨}+\frac{٩ص^{٧}}{٧}+جـ$

$= \frac{(س-١)^{٩}}{٩}+\frac{٦(س-١)^{٨}}{٨}+\frac{٩(س-١)^{٧}}{٧}+جـ$

و) $\int جتا^{٤}س\,ءس = \int (جتا^{٢}س)^{٢}\,ءس$

$= \int (\frac{١}{٢}+\frac{١}{٢}جتا٢س)^{٢}\,ءس = \int (\frac{١}{٤}+\frac{١}{٢}جتا٢س+\frac{١}{٤}جتا^{٢}٢س)ءس$

$= \int (\frac{١}{٤}+\frac{١}{٢}جتا٢س+\frac{١}{٤}جتا^{٢}٢س)ءس = \int (\frac{١}{٤}+\frac{١}{٢}جتا٢س+\frac{١}{٨}+\frac{١}{٨}جتا٤س)ءس$

$\int (\frac{٣}{٨}+\frac{١}{٢}جتا٢س+\frac{١}{٨}جتا٤س)ءس = \frac{٣}{٨}س+\frac{١}{٤}جا٢س+\frac{١}{٣٢}جا٤س+جـ$

ز) $\int \frac{١}{١+جاس}ءس = \int \frac{١-جاس}{(١+جاس)(١-جاس)}ءس$

$= \int \frac{١-جاس}{(١-جا^{٢}س)}ءس = \int \frac{١-جاس}{جتا^{٢}س}ءس = \int (قا^{٢}س-قاس ظاس)ءس$

$= ظاس-قاس+جـ$

ح) $\int \frac{هـ^{٢س}}{هـ^{س}+هـ^{٢س}}ءس = \int \frac{(هـ^{س})^{٢}}{هـ^{س}+(هـ^{س})^{٢}}ءس =$

$\int \frac{(هـ^{س})^{٢}}{هـ^{س}(١+هـ^{س})}ءس = \int \frac{(هـ^{س})}{(١+هـ^{س})}ءس = لـو_{هـ}(١+هـ^{س})+جـ$

السؤال الثاني:

أ) $\int \sqrt{\frac{س+١}{س^{٥}}}ءس = \int \frac{١}{س^{٢}}\sqrt{\frac{١}{س}+١}\,ءس$

نفرض ص = $\frac{١}{س}$ + ١ **فيكون** − س^{٢}ءص = ءس

ومنها $\int \frac{١}{س^{٢}}\sqrt{\frac{١}{س}+١}\,ءس = \int \frac{١}{س^{٢}}ص^{\frac{١}{٢}}(-س^{٢})ءص$

$= -\int ص^{\frac{١}{٢}}ءص = \frac{٢}{٣}ص^{\frac{٣}{٢}}+جـ = -\frac{٢}{٣}(\frac{١}{س}+١)^{\frac{٣}{٢}}+جـ$

ب) $\int \frac{١}{س^{٢}}جا\frac{١}{س}ءس$

نفرض ص = $\frac{١}{س}$ ، **فيكون** − س^{٢}ءص = ءس

شركة الراتب للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبدالرحمن شقير
00970568-952714

$$\int \frac{1}{س^2} جا\frac{1}{س} \, دس = \int \frac{1}{س^2} جاص \times -س^2 \, دص = -\int جاص \, دص = جتاص + جـ = جتا\frac{1}{س} + جـ$$

ج) $\int (جاس + قتاس)^2 \, دس = \int (جا^2 س + 2 + قتا^2 س) دس = \int جا^2 س \, دس + ٢س - ظتاس + جـ$

لكن $\int جا^2 س \, دس = \int (\frac{1}{2} - \frac{1}{2} جتا٢س) دس = \frac{1}{2} س - \frac{1}{4} جا٢س$

$$\int (جاس + قتاس)^2 \, دس = \frac{5}{2} س - \frac{1}{4} جا٢س - ظتاس + جـ$$

د) $$\int \frac{(س+2)^5}{س^7} \, دس = \int \frac{(س+2)^5}{س^5 \times س^2} \, دس = \int \frac{(\frac{س+2}{س})^5}{س^2} \, دس = \int \frac{(1+\frac{2}{س})^5}{س^2} \, دس$$

نفرض $ص = 1 + \frac{2}{س}$ **ومنها يكون** $-س^2 \, دص = ٢ \, دس$

أي أن $$\int \frac{(س+2)^5}{س^7} \, دس = \int \frac{(1+\frac{2}{س})^5}{س^2} \, دس = \int \frac{ص^5}{س^2} \times \frac{-س^2}{2} \, دص$$

$$= -\frac{1}{2} \int ص^5 \, دص = -\frac{1}{12} ص^6 + جـ = -\frac{1}{12} (1+\frac{2}{س})^6 + جـ$$

هـ) $$\int س^2 (س^7 + س^3)^{\frac{1}{3}} \, دس = \int س^2 (س^3 (س^4 + 1))^{\frac{1}{3}} \, دس = \int س^3 (س^4 + 1)^{\frac{1}{3}} \, دس$$

نفرض $ص = 1 + س^4$ **فيكون** $\frac{دص}{٤س^3} = دس$

ومنها $$\int س^2 (س^7 + س^3)^{\frac{1}{3}} \, دس = \int س^3 (س^4 + 1)^{\frac{1}{3}} \, دس = \frac{1}{4} \int ص^{\frac{1}{3}} \, دص = \frac{3}{16} (س^4 + 1)^{\frac{4}{3}} + جـ$$

و) $$\int ظا^3 س \, دس = \int ظاس ظا^2 س \, دس = \int ظاس (قا^2 س - 1) دس = \int ظاس قا^2 س \, دس - \int ظاس \, دس$$

نفرض $ص = ظاس$ **ومنها** $\frac{دص}{قا^2 س} = دس$ **فيكون**

$$\int ظا^3 س \, دس = \int ظاس قا^2 س \, دس - \int ص \, دص = \int ظاس \, دس = \frac{ص^2}{2} + لـو_هـ |جتاس| + جـ$$

$$= \frac{ظا^2 س}{2} + لـو_هـ |جتاس| + جـ$$

شركة الراتب للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبدالرحمن شقير
00970568-952714

تمارين (٤ – ٤ ب) صفحة ١٥٤

السؤال الاول:

أ) $\int$ س لـو$_{هـ}$ س ﺩس

نفرض أن: ﻭ = لـو$_{هـ}$ س ﺩع = س ﺩس

$\therefore$ ﺩﻭ = $\frac{١}{س}$ ﺩس ع = $\frac{س^{٢}}{٢}$

$\int$ س لـو$_{هـ}$ س ﺩس = $\frac{س^{٢}}{٢}$ لـو$_{هـ}$ س – $\int \frac{١}{س} \times \frac{س^{٢}}{٢}$ ﺩس = $\frac{س^{٢}}{٢}$ لـو$_{هـ}$ س – $\frac{س^{٢}}{٤}$ + جـ

ب) $\int$ س قا^{٢} س ﺩس

نفرض أن: ﻭ = س ﺩع = قا^{٢} س ﺩس

$\therefore$ ﺩﻭ = ﺩس ع = ظاس

$\int$ س قا^{٢} س ﺩس = س ظاس – $\int$ ظاس ﺩس = س ظاس + لـو$_{هـ}$ |جتاس| + جـ

ج) $\int$ لـو$_{هـ}$ (س+٢) ^{٣} ﺩس = ٣ $\int$ لـو$_{هـ}$ (س+٢) ﺩس

نفرض أن: ﻭ = ٣ لـو$_{هـ}$ (س + ٢) ﺩع = ﺩس

$\therefore$ ﺩﻭ = $\frac{٣}{س+٢}$ ﺩس ع = س

$\int$ لـو$_{هـ}$ (س+٢) ^{٣} ﺩس = ٣س لـو$_{هـ}$ (س+٢) – $\int \frac{٣س}{س+٢}$ ﺩس

= ٣س لـو$_{هـ}$ (س+٢) – $\int (\frac{٣س+٦}{س+٢} - \frac{٦}{س+٢})$ ﺩس

= ٣س لـو$_{هـ}$ (س+٢) – ٣ $\int (\frac{س+٢}{س+٢}$ ﺩس + $\int \frac{٦}{س+٢}$ ﺩس

= ٣س لـو$_{هـ}$ |س+٢| – ٣س + ٦ لـو$_{هـ}$ |س+٢| + جـ

د) $\int$ س جا٢س ﺩس

نفرض أن: ﻭ = س ﺩع = جا٢س ﺩس

$\therefore$ ﺩﻭ = ﺩس ع = – $\frac{١}{٢}$ جتا٢س

$$\int س\,جا٢س\,ds = -\frac{١}{٢}س\,جتا٢س + \frac{١}{٢}\int جتا٢س\,ds = -\frac{١}{٢}س\,جتا٢س + \frac{١}{٤}جا٢س + جـ$$

هـ) $\int س^{٣}\,هـ^{س^{٢}+١}\,ds = \int س^{٢} \times س\,هـ^{س^{٢}+١}\,ds$

نكامل بالتعويض بفرض أن $ص = س^{٢} + ١$ **ومنها** $ds = \frac{ds ص}{٢س}$

$$\int س^{٣}\,هـ^{س^{٢}+١}\,ds = \int س^{٢} \times س\,هـ^{ص}\,\frac{ds ص}{٢س}$$

$$= \frac{١}{٢}\int (ص-١) \times هـ^{ص}\,ds ص$$ **وهنا نكامل بالأجزاء**

نفرض أن: $ن = \frac{١}{٢}(ص-١)$ $\quad$ $ds ع = هـ^{ص}\,ds ص$

$\therefore ds ن = \frac{١}{٢}ds ص$ $\quad$ $ع = هـ^{ص}$

$$\int س^{٣}\,هـ^{س^{٢}+١}\,ds = \frac{١}{٢}(ص-١)هـ^{ص} - \frac{١}{٢}هـ^{ص} + جـ = \frac{١}{٢}س^{٢}\,هـ^{س^{٢}+١} - \frac{١}{٢}هـ^{س^{٢}+١} + جـ$$

و) $\int جا\sqrt{س+١}\,ds$

نفرض $ص = \sqrt{س+١}$ **ومنها** $٢ص\,ds ص = ds س$

$\int جا\sqrt{س+١}\,ds = \int ٢ص\,جاص\,ds ص$ **ثم نكامل بالأجزاء**

نفرض أن: $ن = ٢ص$ $\quad$ $ds ع = جاص\,ds ص$

$\therefore ds ن = ٢\,ds ص$ $\quad$ $ع = -جتاص$

$$\int جا\sqrt{س+١}\,ds = \int ٢ص\,جاص\,ds ص = -٢ص\,جتاص + ٢جاص + جـ$$
$$= -٢\sqrt{س+١}\,جتا\sqrt{س+١} + ٢جا\sqrt{س+١} + جـ$$

ز) $\int \frac{٢س\,هـ^{س}}{(س+١)^{٢}}\,ds = \int ٢س\,هـ^{س}(س+١)^{-٢}\,ds$

نفرض أن: $ن = ٢س\,هـ^{س}$ $\quad$ $ds ع = (س+١)^{-٢}\,ds س$

$\therefore ds ن = (٢هـ^{س} + ٢س\,هـ^{س})\,ds س$ $\quad$ $ع = \frac{-١}{س+١}$

$$\int \frac{٢س\,هـ^{س}}{(س+١)^{٢}}\,ds = \int ٢س\,هـ^{س}(س+١)^{-٢}\,ds = \frac{-٢س\,هـ^{س}}{س+١} + \int \frac{(٢هـ^{س} + ٢س\,هـ^{س})}{س+١}\,ds$$

شركة الراتب للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبدالرحمن شقير
00970568-952714

$$= \frac{-٢س هـ^{س}}{س+١} + \int \frac{(٢هـ^{س} + ٢س هـ^{س})}{س+١} دس$$

$$= \frac{-٢س هـ^{س}}{س+١} + \int \frac{٢هـ^{س}(١+س)}{س+١} دس = \frac{-٢س هـ^{س}}{س+١} + ٢هـ^{س} + جـ$$

ح) $\int هـ^{س} جاس جتاس دس = \int \frac{١}{٢} هـ^{س} جا٢س دس$

نفرض أن: $ص = \frac{١}{٢} هـ^{س}$ $\quad$ $ع = جا٢س دس$

$\therefore ص دس = \frac{١}{٢} هـ^{س} دس$ $\quad$ $ع = -\frac{١}{٢} جتا٢س$

$$\int هـ^{س} جاس جتاس دس = \int \frac{١}{٢} هـ^{س} جا٢س دس = -\frac{١}{٤} هـ^{س} جتا٢س + \int \frac{١}{٤} هـ^{س} جتا٢س دس$$

ثم نكامل بالأجزاء مرة أخرى للمقدار $\int \frac{١}{٤} هـ^{س} جتا٢س دس$

نفرض أن: $ص = \frac{١}{٤} هـ^{س}$ $\quad$ $ع = جتا٢س دس$

$\therefore ص دس = \frac{١}{٤} هـ^{س} دس$ $\quad$ $ع = \frac{١}{٢} جا٢س$

$$\int هـ^{س} جاس جتاس دس = \int \frac{١}{٢} هـ^{س} جا٢س دس = -\frac{١}{٤} هـ^{س} جتا٢س + \frac{١}{٨} هـ^{س} جا٢س - \int \frac{١}{٨} هـ^{س} جا٢س دس$$

ومنها $\int هـ^{س} جا٢س دس = -\frac{٢}{٥} هـ^{س} جتا٢س + \frac{١}{٥} هـ^{س} جا٢س + جـ$

ط) $\int هـ^{س} (قتاس - قتاس ظتاس) دس = \int هـ^{س} قتاس دس - \int هـ^{س} قتاس ظتاس دس$

نفرض أن: $ص = قتاس$ $\quad$ $ع = هـ^{س} دس$

$\therefore ص دس = -قتاس ظتاس دس$

$$ع = هـ^{س} \int هـ^{س} (قتاس - قتاس ظتاس) دس = \int هـ^{س} قتاس دس - \int هـ^{س} قتاس ظتاس دس$$

$$= هـ^{س} قتاس + \int هـ^{س} قتاس ظتاس دس - \int هـ^{س} قتاس ظتاس دس$$

$$\int هـ^{س} (قتاس - قتاس ظتاس) دس = هـ^{س} قتاس + جـ$$

ي) $\int \frac{١}{س^{٣}} جتا\left(\frac{١}{س}\right) دس$

نفرض ص $= \frac{١}{س}$ **ومنها** $-$ س^{٢} وص $=$ وس

$$\int \frac{١}{س^{٣}} جتا\left(\frac{١}{س}\right) وس = -\int ص جتا ص وص$$

ثم نكامل الناتج بالأجزاء فيكون الجواب $$\int \frac{١}{س^{٣}} جتا\left(\frac{١}{س}\right) وس = -\frac{١}{س} جا\frac{١}{س} - جتا\frac{١}{س} + جـ$$

السؤال الثاني:

نفرض أن: ن $=$ لـو$_{هـ}$ س ، ع $=$ س^{ن} وس

$\therefore$ وع $= \frac{١}{س}$ وس ، ع $= \frac{س^{ن+١}}{ن+١}$

$$\int س^{ن} لـو_{هـ} س وس = \frac{س^{ن+١}}{ن+١} لـو_{هـ} س - \int \frac{س^{ن+١}}{ن+١} \times \frac{١}{س} وس$$

$$= \frac{س^{ن+١}}{ن+١} لـو_{هـ} س - \frac{س^{ن+١}}{(ن+١)^{٢}} = \frac{س^{ن+١}}{ن+١}\left(لـو_{هـ} س - \frac{١}{ن+١}\right) + جـ$$

تمارين (٤ ـ ٤ ج) صفحة ١٥٩

السؤال الأول:

أ) $$\int \frac{س+٢}{س^{٢}-٢س-٣} وس = \int \frac{س+٢}{(س-٣)(س+١)} وس$$

$$\frac{س+٢}{(س-٣)(س+١)} = \frac{أ}{س-٣} + \frac{ب}{س+١}$$ **ومنها يكون** س $+٢ =$ أ$(س+١) +$ ب$(س-٣)$

وتكون أ $= \frac{٥}{٤}$، ب $= \frac{-١}{٤}$ **ومنها**

$$\int \frac{س+٢}{(س-٣)(س+١)} وس = \int \frac{\frac{٥}{٤}}{س-٣} وس + \int \frac{\frac{-١}{٤}}{س+١} وس = \frac{٥}{٤} لـو_{هـ}|س-٣| + \frac{-١}{٤} لـو_{هـ}|س+١| + جـ$$

ب) $$\int \frac{س^{٢}+٢}{س^{٢}+س-٦} وس$$. **بما أن درجة البسط تساوي درجة المقام،**

فنجري القسمة المطولة س$^{٢}+٢$ ⟌ س$^{٢}+$ س -٦ **وينتج أن**

$$\frac{س^{٢}+٢}{س^{٢}+س-٦} = ١ + \frac{-س+٨}{(س+٣)(س-٢)}$$

ومنها $\frac{-س+٨}{(س+٣)(س-٢)} = \frac{أ}{س+٣} + \frac{ب}{س-٢}$ ، **وبعد الحل ينتج أن** أ $= \frac{-١١}{٥}$، ب $= \frac{٦}{٥}$

ويكون $\int \frac{س^{٢}+٢}{س^{٢}+س-٦}$ ءس $= س + \frac{-١١}{٥}$ لـو$_{هـ}$ |س + ٣| + $\frac{٦}{٥}$ لـو$_{هـ}$ |س − ٢| + جـ

ج) $\int \frac{\sqrt{س}}{س - \sqrt{س} - ٢}$ ءس نفرض ص $= \sqrt{س}$ ومنها ٢صءص $=$ ءس

$\int \frac{\sqrt{س}}{س - \sqrt{س} - ٢}$ ءس $= \int \frac{٢ص^{٢}}{ص^{٢} - ص - ٢}$ ءص وبإجراء القسمة المطولة ينتج أن:

$$\frac{٢ص^{٢}}{ص^{٢} - ص - ٢} + ٢ = \frac{٢ص + ٤}{ص^{٢} - ص - ٢} + ٢ = \frac{أ}{ص - ٢} + \frac{ب}{ص + ١}$$

$\int \frac{\sqrt{س}}{س - \sqrt{س} - ٢}$ ءس $= ٢\sqrt{س} + \frac{٨}{٣}$ لـو$_{هـ}$ ($\sqrt{س} - ٢$) $- \frac{٢}{٣}$ لـو$_{هـ}$ ($\sqrt{س} + ١$) + جـ

د) $\int \frac{س + ٢}{(س^{٢} - س)(س + ١)}$ ءس

$$\frac{س + ٢}{(س^{٢} - س)(س + ١)} = \frac{أ}{س} + \frac{ب}{س - ١} + \frac{جـ}{س + ١}$$ وينتج أن أ $= -٢$، ب $= \frac{٣}{٢}$، جـ $= \frac{١}{٢}$

$\int \frac{س + ٢}{(س^{٢} - س)(س + ١)}$ ءس $= -٢$ لـو$_{هـ}$ |س| $+ \frac{٣}{٢}$ لـو$_{هـ}$ |س − ١| $+ \frac{١}{٢}$ لـو$_{هـ}$ |س + ١| + جـ

هـ) $\int$ قتاس ءس $= \int \frac{قتاس(قتاس + ظتاس)}{قتاس + ظتاس}$ ءس

$= \int \frac{قتا^{٢}س + قتاس ظتاس}{قتاس + ظتاس}$ ءس $= -$ لـو$_{هـ}$ |قتاس + ظتاس| + جـ

و) $\int \frac{١}{س - س(لـو_{هـ}س)^{٢}}$ ءس

الحل: نفرض ص $=$ لـو$_{هـ}$ س ومنها سءص $=$ ءس

$\int \frac{س}{س - س ص^{٢}}$ ءص $= \int \frac{١}{١ - ص^{٢}}$ ءص $= \int \frac{-١}{ص^{٢} - ١}$ ءص

$$\frac{-١}{ص^{٢} - ١} = \frac{أ}{ص - ١} + \frac{ب}{ص + ١}$$ ومنها

$\int \frac{١}{س - س(لـو_{هـ}س)^{٢}}$ ءس $= \frac{-١}{٢}$ لـو$_{هـ}$ |لـو$_{هـ}$ س − ١| $+ \frac{١}{٢}$ لـو$_{هـ}$ |١ + لـو$_{هـ}$ س| + جـ

شركة الرائد للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبدالرحمن شقير
00970568-952714

السؤال الثاني

أ) $\int \frac{-س+٧}{س^{٢}+س-٢}\,ءس$

$\frac{-س+٧}{(س-١)(س+٢)}=\frac{أ}{س-١}+\frac{ب}{س+٢}$ **ومنها** أ = ٢، ب = −٣

وينتج أن $\int \frac{-س+٧}{س^{٢}+س-٢}\,ءس = ٢لـو_{هـ}|س-١|-٣لـو_{هـ}|س+٢|+جـ$

ب) $\int \frac{جاس}{١٦-جتا^{٢}س}\,ءس$ **نفرض** ص = جتاس **ومنها** $ءس=\frac{ءص}{-جاس}$

$\int \frac{جاس}{١٦-جتا^{٢}س}\,ءس=\int \frac{جاس}{١٦-ص^{٢}}\frac{ءص}{-جاس}=\int \frac{ءص}{ص^{٢}-١٦}$

$\frac{١}{ص^{٢}-١٦}=\frac{أ}{ص-٤}+\frac{ب}{ص+٤}$ **ومنها** أ = $\frac{١}{٨}$ ، ب = $\frac{-١}{٨}$

$\int \frac{جاس}{١٦-جتا^{٢}س}\,ءس=\frac{١}{٨}لـو_{هـ}|ص-٤|-\frac{١}{٨}لـو_{هـ}|ص+٤|+جـ$

أي أن $\int \frac{جاس}{١٦-جتا^{٢}س}\,ءس=\frac{١}{٨}لـو_{هـ}|جتاس-٤|-\frac{١}{٨}لـو_{هـ}|جتاس+٤|+جـ$

ج) $\int \frac{قتا^{٢}س}{٢-قتا^{٢}س}\,ءس=\int \frac{قتا^{٢}س}{١-ظتا^{٢}س}\,ءس$ ، **نفرض** ص = ظتاس **ومنها** $ءس=\frac{ءص}{-قتا^{٢}س}$

$\int \frac{قتا^{٢}س}{٢-قتا^{٢}س}\,ءس=\int \frac{قتا^{٢}س}{١-ص^{٢}}\frac{ءص}{-قتا^{٢}س}=\int \frac{١}{١-ص^{٢}}\,ءص$ **ثم نكامل بالكسور الجزئية**

$\frac{١}{ص^{٢}-١}=\frac{أ}{ص-١}+\frac{ب}{ص+١}$ **وينتج أن** أ = $\frac{١}{٢}$، ب = $\frac{-١}{٢}$ **فيكون**

$\int \frac{قتا^{٢}س}{٢-قتا^{٢}س}\,ءس=\int \frac{\frac{١}{٢}}{ص-١}\,ءس-\int \frac{\frac{١}{٢}}{ص+١}\,ءس=\frac{١}{٢}لـو_{هـ}|ظتاس-١|-\frac{١}{٢}لـو_{هـ}|ظتاس+١|+جـ$

شركة الرائد للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبدالرحمن شقير
00970568-952714

د)

$$\int \frac{س^{٢}}{س^{٦}+س^{٣}}\,ds = \int \frac{س^{٢}}{س^{٣}(س^{٣}+١)}\,ds = \int \frac{١}{س(س^{٣}+١)}\,ds$$

نفرض ص $= س^{٣}+١$ ومنها $\frac{ds}{٣س^{٢}} = ds$ فيكون $\int \frac{س^{٢}}{س^{٦}+س^{٣}}\,ds = \int \frac{ds}{٣ص(ص-١)}$

وينتج أن $\int \frac{س^{٢}}{س^{٦}+س^{٣}}\,ds = \frac{١}{٣}(لـو_{هـ}|س^{٣}| - لـو_{هـ}|س^{٣}+١|)+جـ$

تمارين عامة(الوحدة الرابعة): صفحة	١٦٠

السؤال الأول: الموضوعي

الفقرة	١	٢	٣	٤
الاجابة	ج	د	ج	ب

السؤال الثاني:

يكون م(س) اقترانا أصليا للاقتران ن(س) اذا كان م´(س) = ن(س)

وبما أن $م´(س) = \frac{-٢س}{٢\sqrt{١-س^{٢}}} = \frac{-س}{\sqrt{١-س^{٢}}} = هـ(س)$

السؤال الثالث:

$\int ن´(س)\,ds = \int (س^{٢}+٣جتاس)\,ds = هـ(س)+جـ$ ومنها

$ن´(س) = \frac{س^{٣}}{٣} - ٣جتاس+جـ$، وبما أن ن´(٠) = ٣ فتكون جـ = ٦

أي أن $ن´(س) = \frac{س^{٣}}{٣} - ٣جتاس + ٦$

كما أن $ن(س) = \int ن´(س)\,ds = \frac{س^{٤}}{١٢} - ٣جاس + ٦س + ج$

وبما أن ن(٠) = ٢ فإن ج = ٢ ومنها $ن(س) = \frac{س^{٤}}{١٢} - ٣جاس + ٦س + ٢$

شركة الراتب للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبدالرحمن فقيه
00970568-952714

شركة الراتب للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبدالرحمن شلقم
00970568-952714

السؤال الرابع

$$ف(ن) = \int ع_{ن} \, د_{ن} = \int (٤ن + لـو_{هـ}(ن+١)) \, د_{ن}$$

$$ف(ن) = ٢ن^{٢} + ن لـو_{هـ}(ن+١) - ن + لـو_{هـ}(ن+١) + جـ$$

وبما أن $ف(١) = ٨$، **فإن** $جـ = ٧ - لـو_{هـ}٤$ **فيكون**

$$ف(ن) = ٢ن^{٢} + ن لـو_{هـ}(ن+١) - ن + لـو_{هـ}(ن+١) + ٧ - لـو_{هـ}٤$$

$$ف(٣) = ٢٢ + ٣ لـو_{هـ}٤ \text{ مترا}$$

السؤال الخامس:

١) $\int س \sqrt{س^{٢} - ٣} \, د_{س}$

نفرض $ص = س^{٢} - ٣$ **فيكون** $د_{ص} = ٢س \, د_{س}$ **فيكون** $\int س ص^{\frac{١}{٢}} \, د_{س} = \frac{١}{٣} \int \frac{د_{ص}}{٢س} = \frac{١}{٣}(س^{٢} - ٣)^{\frac{٣}{٢}} + جـ$

٢) $\int \frac{١}{س^{١٠} + س} \, د_{س}$ **نفرض** $ص = س^{٩} + ١$ **فيكون** $د_{س} = \frac{د_{ص}}{٩س^{٨}}$

$$\int \frac{١}{س^{١٠} + س} \, د_{س} = \int \frac{١}{س(س^{٩} + ١)} \, د_{س} = \frac{١}{٩} \int \frac{١}{ص(ص - ١)} \, د_{ص}$$

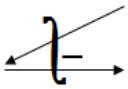
أي أن

وبالكسور الجزئية ينتج أن: $\int \frac{١}{س^{١٠} + س} \, د_{س} = \frac{١}{٩}(لـو_{هـ}|س^{٩}| - لـو_{هـ}|س^{٩} + ١|) + جـ$

٣) $\int قا^{٢} \sqrt{س} \, د_{س}$ **نفرض** $ص = \sqrt{س}$ **فيكون** $د_{س} = ٢ص \, د_{ص}$ **أي أن**

$$\int قا^{٢} \sqrt{س} \, د_{س} = \int ٢ص قا^{٢} ص \, د_{ص}$$ **ثم** **نكامل بالأجزاء**

نفرض أن: $ن = ٢ص$ $\quad \therefore د_{ن} = ٢ د_{ص}$



$د_{ع} = قا^{٢} ص \, د_{ص}$

$ع = ظا ص$

$$\int قا^{٢} \sqrt{س} \, د_{س} = \int ٢ص قا^{٢} ص \, د_{ص} = ٢ص ظا ص - ٢ \int ظا ص \, د_{ص}$$

$$= ٢\sqrt{س} ظا \sqrt{س} + ٢ لـو_{هـ}|جتا \sqrt{س}| + جـ$$

٤) $\int قا(٣س + ١) ظا(٣س + ١) \, د_{س} = \frac{١}{٣} قا(٣س + ١) + جـ$

٥) $\int (س^{٢} + ١) جتا س \, د_{س}$ **نكامل بالأجزاء مرتين فينتج أن :**

$$\int (س^{٢} + ١) جتا س \, د_{س} = (س^{٢} + ١) جا س + ٢س جتا س - ٢ جا س + جـ$$

٦) $\int لـو_{هـ}(س^{٢} - ١) \, د_{س}$

نفرض أن: $ص = لـو_{هـ}(س^{٢}-١)$ $\quad$ $ع = س$ $\quad$ $ع د = د س$

$\therefore د ص = \frac{٢س}{س^{٢}-١} د س$

$\int لـو_{هـ}(س^{٢}-١) د س = س لـو_{هـ}(س^{٢}-١) - \int \frac{٢س^{٢}}{س^{٢}-١} د س$

ثم نقسم ونكامل بالكسور الجزئية وينتج أن: $\int لـو_{هـ}(س^{٢}-١) د س$

$= س لـو_{هـ}(س^{٢}-١) - ٢س + لـو_{هـ}|س+١| - لـو_{هـ}|س-١| + جـ$

٧) $\int \frac{س^{٢}+١}{س^{٣}+س} د س = \int \frac{١}{س} د س = لـو_{هـ}|س| + جـ$

٨) $\int \frac{قا^{٤}س}{١-ظا^{٢}س} د س$ **نفرض** $ص = ظاس$ **فيكون** $د ص = قا^{٢}س \, د س$

$\int \frac{قا^{٤}س}{١-ظا^{٢}س} د س = \int \frac{قا^{٢}س}{١-ص^{٢}} د ص = \int \frac{١+ص^{٢}}{١-ص^{٢}} د ص$ **ثم نقسم ونكامل بالكسور الجزئية**

وينتج $\int \frac{قا^{٤}س}{١-ظا^{٢}س} د س = -ظاس - لـو_{هـ}|١-ظاس| + لـو_{هـ}|١+ظاس| + جـ$

٩) $\int (جتا^{٤}س - جا^{٤}س) د س = \int (جتا^{٢}س - جا^{٢}س)(جتا^{٢}س + جا^{٢}س) د س$

$= \int جتا٢س \, د س = \frac{١}{٢} جا٢س + جـ$

١٠) $\int (قتاس+ظتاس)^{٨} قتاس \, د س = \int (قتاس+ظتاس)^{٧} (قتاس+ظتاس) قتاس \, د س$

$= \int (قتاس+ظتاس)^{٧} (قتا^{٢}س + ظتاس قتاس) د س = -\frac{١}{٨} (قتاس+ظتاس)^{٨} + جـ$

١١) $\int (س^{٨} - ٦س)^{٦} د س = \int (س(س^{٧} - ٦))^{٦} د س = \int س^{٦} (س^{٧} - ٦)^{٦} د س$

$= \frac{١}{٧} \int ٧س^{٦} (س^{٧} - ٦)^{٦} د س = \frac{١}{٤٩} (س^{٧} - ٦)^{٧} + جـ$

السؤال السادس:

بما أن $ع = ا\sqrt{ف}$ **فإن** $\frac{ك ف}{ك ن} = ا\sqrt{ف}$ **ومنها** $ا ك ن = \frac{ك ف}{\sqrt{ف}}$

$ف^{-\frac{١}{٢}} ك ف = ا ك ن$ **ويكون** $٢ف^{\frac{١}{٢}} = ا ن + جـ$

لكن $ف(٢) = ٩$ **ومنها** $٢ا + جـ = ٦$ ، **كذلك** $ف(٤) = ١٦$ **فيكون** $٤ا + جـ = ٨$

وبحل المعادلتين ينتج أن $ا = ١$

شركة الراتب للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبدالرحمن شاهين
00970568-952714

شركة الراتب للتفوق والإبداع الثقافي
00970568-952714
د. عبدالرحمن شقير

السؤال السابع:

نكامل الطرفين بالنسبة ل س

$$\int س\, هـ''(س)\, ءس + \int هـ(س)\, ءس = \int جتاس\, ءس$$

وبتكامل الجزء الأول $\int س\, هـ''(س)\, ءس$ **بالأجزاء ينتج أن**

$$س\, هـ'(س) - \int هـ'(س)\, ءس + \int هـ(س)\, ءس = جاس + جـ$$

أي أن $س\, هـ'(س) = جاس + جـ$ **وبما أن** $هـ'(\pi) = ٠$ **فإن** $جـ = ٠$

$$هـ(س) = \frac{جاس}{س}$$

حل آخر: بما أن $س\, هـ''(س) + ١ \times هـ'(س) = جتاس$ **فإن** $(س\, هـ(س))' = جتاس$ **ومنه**

$$\int (س\, هـ(س))'\, ءس = \int جتاس\, ءس$$

أي أن $س\, هـ(س) = جاس + جـ$ **وبما أن** $هـ(\pi) = ٠$ **فإن** $جـ = ٠$ **ومنها يكون** $هـ(س) = \frac{جاس}{س}$

حلول الوحدة الخامسة

تمارين (٥-١) صفحة ١٧٠

السؤال الأول: أ) $س_٢ = -١ + \frac{١-(-٢)}{٢} \times ٢ = ٠$

ب) **الفترة الجزئية الرابعة** $= [١، \frac{١}{٢}]$

السؤال الثاني: $س_٤ = جـ + \frac{٧-جـ}{١٠} \times ٤ = ٤$ **ومنها** $جـ = ٢$

السؤال الثالث: $\sigma_٤ = \{١، ٢، ٣، ٤، ٥\}$ **لأن طول الفترة الجزئية يساوي ١ ، فتكون**

$$ر(ن، \sigma_٤) = ١ \times \sum_{ر=١}^{ر=٤} ن(س_ر^*) = ١ \times ((٥) ن + (٤) ن + (٣) ن + (٢) ن)$$

$$ر(ن، \sigma_٤) = ١ \times (-٢ + ٣ - + ١٠ - + ١٩ -) = -٣٠$$

السؤال الرابع: $ن(س) = ٢ + هـ^{س}$ **، طول الفترة الجزئية =١**

فتكون $\sigma_٣ = \{-١، ٠، ١، ٢\}$

$$\text{ك}(\sigma_{3}، \text{ن}) = \sum_{\text{ر}=1}^{3} \text{ن}(\text{س}_{\text{ر}}^{*}) \times 1 = \text{ن}(-1) + \text{ن}(0) + \text{ن}(1) = 7 + \text{هـ} + \frac{1}{\text{هـ}} = \ldots$$

السؤال الخامس: $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}}{\text{س}^{2}+2}$ ، $\sigma_{5} = \{-1، 0، 1، 2، 3، 6، 8\}$

الفترات الجزئية هي : $[-1، 0]، [0، 2]، [2، 3]، [3، 6]، [6، 8]$

$$\text{ك}(\sigma_{5}، \text{ن}) = -1 \times 1 + 0 \times 2 + 1 \times \frac{12}{4} + 3 \times \frac{13}{5} + 2 \times \frac{16}{8}$$

ومنها يكون $\frac{128}{10} = 6.5$ **ومنها** $1 = 2$

السؤال السادس: $\text{س}_{2} = 1 + \frac{\text{ب}-1}{8} \times 2 = 2$ ومنها $13 + \text{ب} = 8$

، $\text{س}_{4} = 1 + \frac{\text{ب}-1}{12} \times 4 = 4$ ومنها $12 + \text{ب} = 12$ **وبحل المعادلتين ينتج أن :**

$$\text{ا} = -4 \quad ، \quad \text{ب} = 20$$

السؤال السابع : $\text{ن}(\text{س}) = \text{جاس}$ ، $\sigma_{4} = \left\{0، \frac{\pi}{6}، \frac{\pi}{4}، \frac{\pi}{3}، \frac{\pi}{2}\right\}$

$$\text{ك}(\sigma_{4}، \text{ن}) = \frac{\pi}{6} \times \text{جا}0 + \frac{\pi}{12} \times \text{جا}\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{12} \times \text{جا}\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \times \text{جا}\frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{\pi}{6} \times 0 + \frac{\pi}{12} \times \frac{1}{2} + \frac{\pi}{12} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{6} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{24}(1 + 2\sqrt{2} + \sqrt{3})$$

السؤال الثامن : طول الفترة الجزئية $= \frac{1}{\text{ن}}$

$$\text{ل} = \text{ك}(\sigma_{\text{ن}}، \text{ن}) = \frac{1}{\text{ن}} \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}=\text{ر}} \text{ن}(\text{س}_{\text{ر}}) \quad ، \quad \text{ك} = \text{ك}(\sigma_{\text{ن}}، \text{ن}) = \frac{1}{\text{ن}} \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}=\text{ر}} \text{ن}(\text{س}_{\text{ر}-1})$$

$$\text{ل} - \text{ك} = \frac{1}{\text{ن}} \left(\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}=\text{ر}} \text{ن}(\text{س}_{\text{ر}}) - \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}=\text{ر}} \text{ن}(\text{س}_{\text{ر}-1}) \right)$$

$$\text{ل} = \frac{1}{\text{ن}} \left(\text{ن}(\text{س}_{1}) + \text{ن}(\text{س}_{2}) + \text{ن}(\text{س}_{3}) + \ldots + \text{ن}(\text{س}_{\text{ن}}) \right)$$

$$\text{ك} = \frac{1}{\text{ن}} \left(\text{ن}(\text{س}_{0}) + \text{ن}(\text{س}_{1}) + \text{ن}(\text{س}_{2}) + \ldots + \text{ن}(\text{س}_{\text{ن}-1}) \right)$$

وبالطرح ينتج أن $ل - ك = \frac{1}{ن}(\ ن(س_ن) - ن(س_0)\ ) = \frac{1}{ن}((0)ن - (1)ن)$

تمارين (٥-٢) صفحة ١٧٥

السؤال الأول: $ع(ن، \sigma_ن) = \frac{ب-ا}{ن} \sum_{ر=1}^{ن} ن(س^*_ر)$ ، $س^*_ر = س_ر = -1 + \frac{٤}{ن} ر$

ويكون $ن(س_ر) = -1 + \frac{٤}{ن} ر = ٧ - \frac{٢٠}{ن} ر$

$$ع(ن، \sigma_ن) = \frac{٤}{ن} \sum_{ر=1}^{ن} (٧ - \frac{٢٠}{ن} ر) = \frac{٤}{ن} (٧ن - \frac{٢٠}{ن} \frac{ن(ن+1)}{٢}) = -١٢ - \frac{٤٠}{ن}$$

السؤال الثاني: $ع(ن، \sigma_ن) = \frac{1}{ن} \sum_{ر=1}^{ن} ن(س^*_ر) = \frac{1}{ن} \sum_{ر=1}^{ن} (|هـ|(س^*_ر) + ب)$

$$= \frac{1}{ن} (\sum_{ر=1}^{ن} |هـ|(س^*_ر) + \sum_{ر=1}^{ن} ب) = |\frac{1}{ن}| \sum_{ر=1}^{ن} هـ(س^*_ر)) + ب$$

$$= |٢| ع(هـ، \sigma_ن) + ب$$

السؤال الثالث: $\int_{1}^{ب} ٢س ءس = \lim_{ن \to \infty} \frac{ب-1}{ن} \sum_{ر=1}^{ن} ن(س^*_ر) = \lim_{ن \to \infty} \frac{ب-1}{ن} \sum ٢(١ + \frac{ب-1}{ن} ر)$

$$= \lim_{ن \to \infty} \frac{ب-1}{ن} \sum ٢ + ٢(\frac{ب-1}{ن} ر) = \lim_{ن \to \infty} \frac{ب-1}{ن} (٢ + ٢ \frac{ب-1}{ن} \frac{ن(ن+1)}{٢})$$

بالاختصار والتبسيط ينتج ان $\int_{1}^{ب} ٢س ءس = ٢(ب-1) + (ب-1)^٢ = \lim_{ن \to \infty} (٣٥ + \frac{٢}{ن}) = ٣٥$

وبحل المعادلة ينتج القيمة المطلوبة ب=٦

السؤال الرابع: نستخدم تعريف التكامل المحدود (ريمان)وينتج ان

$$ع(ن، \sigma_ن) = \frac{٥}{ن} \sum_{ر=1}^{ن} ن(س^*_ر) \quad ، \quad \int_{-1}^{٤} \frac{1}{٢} ءس$$

$$= \frac{5}{2} \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{n} = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{n} \frac{5}{n} = (r\frac{5}{n} + 1-)ت$$

وينتج أن $\int_{1-}^{4} س ع = \frac{1}{2}$ نهـــا $_{n \to \infty}$ $م(ت_n ، \sigma) = \frac{5}{2}$ نهـــا $_{n \to \infty} = \frac{5}{2}$

ب) $م(ت_n ، \sigma) = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} ت(س_r^*) = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} ت(1 + r\frac{1}{n})$

$$= \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} (4-6)(1 + r\frac{1}{n}) - 2-) = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} ((r\frac{6-}{n} - 2-)$$

$$= \frac{1}{n} (2-n - \frac{6}{n} \frac{n(1+n)}{2}) = 5- - \frac{3}{n}$$

$$\int_{1}^{2} (4 - 6س) ع س = \text{نهـــا}_{n \to \infty} م(ت_n ، \sigma) = 5-$$

السؤال الخامس: لاحظ ان $ت(س) = \frac{جتا^3 س - 1}{جتاس - 1} = \frac{(جتاس - 1)(جتا^2 س + جتاس + 1)}{جتاس - 1}$ ،

نفرض هـ(س) $= جتا^2 س + جتاس + 1$ معرفا على الفترة $[\frac{-\pi}{2} ، \frac{\pi}{2}]$ ، فيكون $ت(س) =$ هـ(س)

$\forall س \in [\frac{-\pi}{2} ، \frac{\pi}{2}] - \{0\}$

بما ان هـ(س) متصلا على مجاله فهو قابل للتكامل ايضا

حسب النظرية فان $ت(س)$ قابل للتكامل على الفترة $[\frac{-\pi}{2} ، \frac{\pi}{2}]$

تمارين (٥ــــ٣) صفحة ١٨٠

السؤال الأول: أ) $\int_{0}^{4} (3 + \sqrt{س})^2 ع س = \int_{0}^{4} (9 + 6\sqrt{س} + س) ع س =$

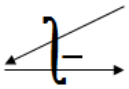
$$= \int_{0}^{4} (9 + 6س^{\frac{1}{2}} + س) ع س = 9س + 4س^{\frac{3}{2}} + \frac{س^2}{2} \Big|_{0}^{4} = 76$$

ب) $\int_{1}^{2} س(س^{2}-3)^{3}\,ود س$ ، بفرض $(س^{2}-3)=ص$ واجراء التكامل بالتعويض ينتج

$$\int_{1}^{2} س(س^{2}-3)^{3}\,ود س=\frac{1}{2}\int_{-2}^{1}(ص)^{3}\,ود ص=\frac{(-2)^{4}-1^{4}}{8}=\frac{-15}{8}$$

ج) $\int_{1}^{هـ} لـو_{هـ} س\,ود س$

بالأجزاء $ن=لـو_{هـ} س$ ، $ود ن=\frac{1}{س}ود س$



$ود هـ=ود س$ ، $هـ=س$

$$\int_{1}^{هـ} لـو_{هـ} س\,ود س=س لـو_{هـ} س-س\Big|_{1}^{هـ}=هـ-0-(هـ-1)=1$$

د) $\int_{0}^{2} 120\,س^{2}(س-1)^{3}\,ود س$ بفرض $س-1=ص$ ، $ود س=ود ص$

$$\int_{0}^{2} 120\,س^{2}(س-1)^{3}\,ود س=\int_{-1}^{1} 120(ص+1)^{2}(ص)^{3}\,ود ص$$

$$=\int_{-1}^{1} 120(ص^{2}+2ص+1)ص^{3}\,ود ص=\int_{-1}^{1} 120\,(ص^{5}+2ص^{4}+ص^{3})ود ص$$

$$=120(\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{5}+\frac{1}{4})-120(\frac{(-1)^{6}}{6}+2\times\frac{(-1)^{5}}{5}+\frac{(-1)^{4}}{4})=120\times\frac{4}{5}=96$$

السؤال الثاني : $ن(س)=\frac{س}{س+1}$ ، في الفترة $[0،4]$

$$ت(س)=\int_{0}^{س} ن(ص)ود ص=\int_{0}^{س}\frac{ص}{ص+1}ود ص$$

$$= \int_{ب}^{س} \frac{ص+١-١}{ص+١}\,د ص = \int_{ب}^{س} ١\,د ص - \int_{ب}^{س} \frac{١}{ص+١}\,د ص$$

$$= (ص - لـو_{هـ}|ص+١|)\Big|_{ب}^{س} = س - لـو_{هـ}|س+١|$$

السؤال الثالث: بما أن ت(-٢) = ٠ فإن ٢(-٢)^{٢} + ا = ٠ ومنها ا = -٨

كما أن ت(س) متصل دائما على مجاله

ت(٣$^{-}$) = ت(٣$^{+}$) ومنها ١٠ = ٣ب + ١ ، ومنها تكون ب = ٣

السؤال الرابع : $ت(س) = \int_{\frac{١}{٢}}^{س} ن(ص)\,د ص = س + جا\pi س + جـ$

لمعرفة قيمة الثابت جـ ، فإن $ت(\frac{١}{٢}) = ٠$ ومنها $\frac{١}{٢} + ١ + جـ = ٠ \Leftarrow جـ = \frac{-٣}{٢}$

$ت'(س) = ن(س) = ١ + \pi جتا\pi س$

لإيجاد ن(٢) نعوض بدل س (١) فينتج ان $ن(٢) = ١ + \pi جتا٢\pi = ١ + \pi$

السؤال الخامس: $ت'(س) = (ا + هـ^{س})$

$ت'(٢) = (ا + هـ^{٢}) = -١$ ومنها $ا = -١ - هـ^{٢}$

السؤال السادس : $\int_{ب}^{١} (س^{٢} - ٢س)(س-١)^{٥}\,د س$

نفرض ص = س - ١ ، فيكون د ص = د س ، وعندما س= ٠ فإن ص= -١ ، وعندما س= ١ فإن ص= ٠

أي أن $\int_{-١}^{٠} (ص+١)(ص-١)(ص)^{٥}\,د ص = \int_{-١}^{٠} (ص^{٢} - ١)(ص)^{٥}\,د ص$

$$= \int_{-١}^{٠} (ص^{٧} - ص^{٥})\,د ص = \frac{ص^{٨}}{٨} - \frac{ص^{٦}}{٦}\Big|_{-١}^{٠} = \frac{١}{٢٤}$$

شركة الرائد للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبدالرحمن شقير
00970568-952714

تمارين (٥-٤) صفحة ١٨٧

السؤال الاول: أ) $\int_{0}^{\pi} جا^{٢}س\,ds = \frac{١}{٢}\int_{0}^{\pi}(١-جتا٢س)\,ds = \frac{\pi}{٢} - \frac{جا٢\pi}{٢} = ٠ - \frac{\pi}{٢}$

ب) $\int_{0}^{٢}(١+هـ^{س})^{٢}\,ds = \int_{0}^{٢}(١+٢هـ^{س}+هـ^{٢س})\,ds = (س+٢هـ^{س}+\frac{١}{٢}هـ^{٢س})\Big|_{٠}^{٢}$

$= (٢+٢هـ^{٢}+\frac{هـ^{٤}}{٢}) - (٠+٢هـ^{٠}+\frac{هـ^{٠}}{٢}) = \frac{هـ^{٤}}{٢}+٢هـ^{٢}-\frac{١}{٢}$

جـ) $\int_{-\pi/٣}^{\pi/٣}(س+١)(س^{٢}+٤)\,ds = \int_{-\pi/٣}^{\pi/٣}(س^{٣}+س^{٢}+٤س+٤)\,ds$

$= (\frac{س^{٤}}{٤}+\frac{س^{٣}}{٣}+٢س^{٢}+٤س)\Big|_{-\pi/٣}^{\pi/٣} = ١٠\pi/٣$

د) $\int_{-٢}^{١}\frac{س^{٣}-٢٧}{س^{٢}+٣س+٩}\,ds = \int_{-٢}^{١}\frac{(س-٣)(س^{٢}+٣س+٩)}{س^{٢}+٣س+٩}\,ds$

$= \int_{-٢}^{١}(س-٣)\,ds = (\frac{س^{٢}}{٢}-٣س)\Big|_{-٢}^{١} = \frac{-٢١}{٢}$

السؤال الثاني: أ) **نفرض** $ن(س) = س^{٢}+٢-(٢س-١) = س^{٢}-٢س+٣$

لاحظ ان $ن(س) \geq ٠$ **دائما لان المميز سالب ومنها** $(س^{٢}+٢)-(٢س-١) \geq ٠$

$(س^{٢}+٢) \geq (٢س-١)$ $\forall س \in [١،٢]$ أي ان $\int_{١}^{٢}(س^{٢}+٢)\,ds \geq \int_{١}^{٢}(٢س-١)\,ds$

ب) **لاحظ ان** $س^{٢}+٢ \geq ٠$ ، $\forall س \in ع$ ، **و حسب خاصية المقارنة**

$\int_{٢}^{٣}(س^{٢}+٢س)\,ds \geq ٠$

السؤال الثالث: أ) $\int_{٥}^{٧}س^{٣}\,ds + \int_{١}^{٥}س^{٣}\,ds = \int_{١}^{٧}س^{٣}\,ds$

شركة الرائد للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبدالرحمن شقير
00970568-952714

ب) $\int_{1}^{2} |س+2| \, ds - \int_{2}^{4} |س+2| \, ds$

$= \int_{1}^{2} |س+2| \, ds + \int_{2}^{4} |س+2| \, ds = \int_{1}^{4} |س+2| \, ds$

ج) $\int_{1}^{3} س^2 \, ds - \int_{3}^{1} 4س \, ds + \int_{3}^{0} (س^2+4) \, ds =$

$= \int_{1}^{3} س^2 \, ds + \int_{1}^{3} 4س \, ds + \int_{3}^{0} (س^2+4) \, ds = \int_{1}^{3} (س^2+4) \, ds + \int_{3}^{0} (س^2+4) \, ds$

$= \int_{1}^{0} (س^2+4) \, ds$

د) $\int_{2}^{0} (س-1) \, ds + \int_{7}^{0} \frac{1-س^2}{س+1} \, ds = \int_{2}^{0} (س-1) \, ds + \int_{7}^{0} \frac{(1-س)(1+س)}{س+1} \, ds$

$= \int_{2}^{0} (س-1) \, ds + \int_{7}^{0} (1-س) \, ds = \int_{2}^{0} (س-1) \, ds + \int_{5}^{7} (س-1) \, ds$

$= \int_{2}^{7} (س-1) \, ds$

السؤال الرابع: $\int_{1}^{0} ن(س) \, ds = 7$

أ) $\int_{1}^{0} (2ن(س) - 3س + 1) \, ds = 2 \int_{1}^{0} ن(س) \, ds - 3 \int_{1}^{0} س \, ds + \int_{1}^{0} ds$

$= 2 \times 7 - 3(1\ 2) + 4 = -18$

ب) $\int_{1}^{0} 12ا ن(س) \, ds = 12ا \int_{1}^{0} ن(س) \, ds = 12ا \times 1 = 7$ ومنها $ا = \frac{1}{14}$

شركة الراتب للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبدالرحمن شقير
00970568-952714

السؤال الخامس: $\int_{1}^{0} ن(س)\,ءس = ٨$

أ) $\int_{1}^{0} (٣ن(س) - ٢)\,ءس = ٣\int_{1}^{0} ن(س)\,ءس - ٢\int_{1}^{0} ءس$

$٣ \times ٨ - ٢ \times ٤ = ١٦$

ب) $\int_{٣}^{٧} (٤ن(س - ٢) - ٢س)\,ءس$

بفرض ص $= س - ٢$ وتبديل حدود التكامل يصبح $\int_{٣}^{٧} ن(س - ٢)\,ءس = \int_{1}^{0} ن(ص)\,ءص$

$\int_{٣}^{٧} (٤ن(س - ٢) - ٢س)\,ءس = ٤\int_{1}^{0} ن(ص)\,ءص - ٢\int_{٣}^{٧} س\,ءس = ٤ \times ٨ - ٤٠ = -٨$

السؤال السادس:

$\int_{٢}^{٧} ٣ن(س)\,ءس = ٩ ،\ \int_{٢}^{٤} ٥ن(س)\,ءس = ١٠$

$\int_{٤}^{٧} ٢ن(س)\,ءس = ٢\int_{٤}^{٧} ن(س)\,ءس = ٢(\int_{٤}^{٢} ن(س)\,ءس + \int_{٢}^{٧} ن(س)\,ءس)$

$٢(-\int_{٢}^{٤} ن(س)\,ءس + \int_{٢}^{٧} ن(س)\,ءس)$

$٢(-٢ + ٣) = ٢$

السؤال السابع: $\int_{1}^{٣} ن(س)\,ءس = ١٨$

$\int_{1}^{٣} ن(س)\,ءس = \int_{1}^{٢} (أس + ١)\,ءس + ٣\int_{٢}^{٣} س^{٢}\,ءس = ١٨$

$أ + ١ + (\frac{-٤}{٢}) = (٨ - ٢٧) = ١٨$

$\frac{أ٣}{٢} = -٢ \Leftarrow أ = -\frac{٤}{٣}$

السؤال الثامن: $\int_{-1}^{2} ٣ع^{٢}\,ءع = ع^{٣}\Big|_{-1}^{٢} = ٩$ فيكون

$$\int_{١}^{ب} (٤س - \int_{-1}^{٢} ٣ع^{٢}\,ءع)\,ءس = \int_{١}^{ب} (٤س - ٩)\,ءس = ١٢$$

ومنها $٢ب^{٢} - ٩ب - ٥ = ٠$ أي أن $(٢ب + ١)(ب - ٥) = ٠$

$ب = -\frac{١}{٢}$ ، $ب = ٥$

السؤال التاسع: $ث(س) = |٢ - س| = \begin{cases} ٢ - س ، ٠ \geq س \geq ٢ \\ س - ٢ ، ٢ \geq س \geq ٥ \end{cases}$

١) عندما $٠ \geq س \geq ٢$ ، فإن $ت(س) = \int_{ب}^{س} ث(ص)\,ءص = \int_{ب}^{س} (٢ - ص)\,ءص = ٢س - \frac{س^{٢}}{٢}$

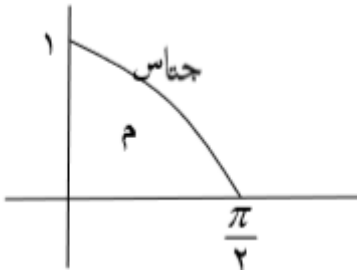
٢) عندما $٢ \geq س \geq ٥$ فإن $ت(س) = \int_{ب}^{٢} ث(ص)\,ءص = \int_{ب}^{٢} (٢ - س)\,ءس + \int_{٢}^{س} ث(ص)\,ءص$

ومنها $ت(س) = ت(٢) + \int_{٢}^{س} (ص - ٢)\,ءص = ٢ + (\frac{س^{٢}}{٢} - ٢س + ٢)$

$$ت(س) = \begin{cases} ٢س - \frac{س^{٢}}{٢} ، ٠ \leq س < ٢ \\ \frac{س^{٢}}{٢} - ٢س + ٤ ، ٢ \leq س \leq ٥ \end{cases}$$

تمارين (٥-٥أ) صفحة ١٩٤

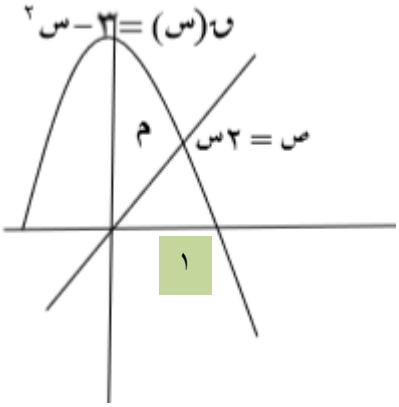
السؤال الاول :



$$م = \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} |ن(س)| ء س = \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} جتاس ء س$$

$$= جا\frac{\pi}{٢} - جا(٠) = ١ \text{ وحدة مساحة}$$

السؤال الثاني: معادلة المستقيم



المار بالنقطتين أ(٠،٠) ، ب(١، ٢) هي

$$\frac{ص - ٠}{س - ٠} = \frac{٢ - ٠}{١ - ٠} \Leftarrow ص = ٢س$$

نجد نقاط تقاطع ق(س) والمستقيم $ص = ٢س \Leftarrow هـ(س) = ٢س$

$$٣ - س^{٢} = ٢س$$

$$\Leftarrow ٠ = س^{٢} + ٢س - ٣ = (س + ٣)(س - ١)$$

$\Leftarrow$ **س=١ أو س= -٣ ترفض**

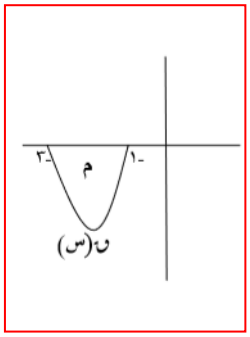
$$م = \int_{٠}^{١} |ن(س) - هـ(س)| ء س = \int_{٠}^{١} (٣ - س^{٢} - ٢س) ء س$$

$$= ٣(١ - ٠) - \frac{١ - ٠}{٣} - ٢ \times \frac{١ - ٠}{٢} = \frac{٥}{٣} \text{ وحدة مساحة}$$

السؤال الثالث:

$$ن(س) = (س^{٢} - ٩)(س^{٢} - ١) \Leftarrow ٠ = (س - ٣)(س + ٣)(س - ١)(س + ١)$$

ومنها س=٣ أو س=١ ترفض لأن المساحة في الربع الثالث ، س=-٣ ، س=-١



$$م = \int_{-٣}^{-١} |ن(س)| ء س = \int_{-٣}^{-١} (س^{٢} - ٩)(س^{٢} - ١) ء س$$

شركة الرائد للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبد الرحمن فكعور
00970568-952714

$$= \int_{-3}^{-1} \left(س^{4} - ١٠ س^{2} + ٩\right) ؤس =$$

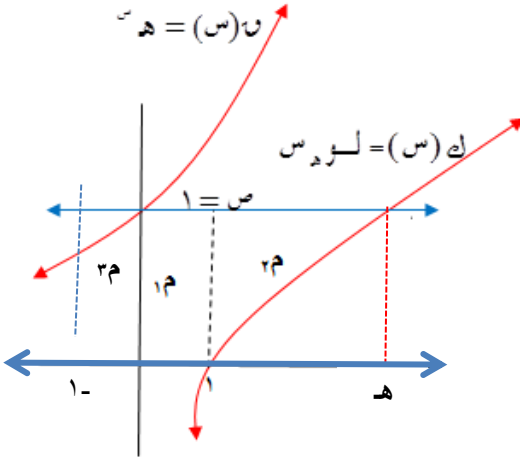
$$= \left(\left(-١\right)^{٥} - \left(-٣\right)^{٥} \over ٥ \right) - ١٠ \times \left(-١\right)^{٣} - \left(-٣\right)^{٣} \over ٣ + ٩ \times \left(-١ + ٣\right) = {٣٠٤ \over ١٥}$$ وحدة مساحة

السؤال الرابع :

نجد نقاط التقاطع بين

أولا : ق، ص $\Leftarrow هـ^{س} = ١ \Leftarrow س = ٠$

ثانيا : ك ، ص $\Leftarrow$ لـو$_{هـ}$ س $= ١ \Leftarrow س = هـ$



م = م١ + م٢ + م٣

$$م_{١} = \int_{٠}^{١} ١ ؤس = ١(١ - ٠) = ١$$ وحدة مساحة

$$م_{٢} = \int_{١}^{هـ} (١ - لـو_{هـ} س) ؤس = \int_{١}^{هـ} ١ ؤس - \int_{١}^{هـ} لـو_{هـ} س ؤس$$

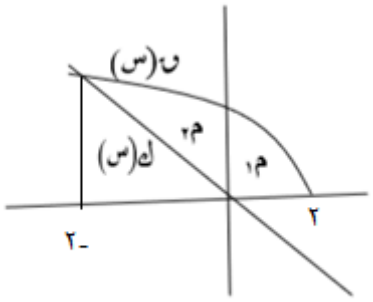
$$= ١(هـ - ١) - \left(س لـو_{هـ} س |_{١}^{هـ} - \int_{١}^{هـ} س \times {١ \over س} ؤس \right)$$

$$= هـ - ١ - (هـ - ٠ - ١(هـ - ١)) = هـ - ٢$$ وحدة مساحة

$$م_{٣} = = \int_{-١}^{٠} هـ^{س} ؤس = هـ^{س} |_{-١}^{٠} = \left(١ - {١ \over هـ}\right)$$

م = م١ + م٢ + م٣ $= ١ + هـ - ٢ + ١ - {١ \over هـ} = هـ - {١ \over هـ}$ وحدة مساحة

السؤال الخامس:



نجد نقاط التقاطع بين ن(س) ، ك(س) $\Leftarrow س^{٢} = ٢ - س$

$\leftarrow س = -٢$ أو س= ١ ترفض

م = م١ + م٢

$$م = \int_{٠}^{٢} ن(س) ؤس = \int_{٠}^{٢} \sqrt{٢ - س} ؤس$$

شركة الرائد للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبدالرحمن شلبي
00970568-952714

$$= \left| \frac{(٢-س)^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢} \times ١^{-}} \right|_{٠}^{٢} = \frac{٢^{-}}{٣} \times \left(\sqrt{٨} - \sqrt{٨ - س^{٣}} \right)$$

$$= \frac{٢^{-}}{٣} \left(\sqrt{٨} - ٢^{-} \right) = \frac{٤\sqrt{٨}}{٣}$$ وحدة مساحة

$$م = \int_{-٢}^{٠} \left| ن(س) - ك(س) \right| د س = \int_{-٢}^{٠} \left(\sqrt{٨ - س} - (-س) \right) د س$$

$$= \left| \frac{(٢-س)^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢} \times ١^{-}} \right|_{-٢}^{٠} + \left| \frac{س^{٢}}{٢} \right|_{-٢}^{٠} = \frac{٢^{-}}{٣} \left(٢\sqrt{٨} - ٨ \right) + \frac{٠ - ٤}{٢} = \frac{١٠}{٣} - \frac{٤\sqrt{٨}}{٣}$$ وحدة مساحة

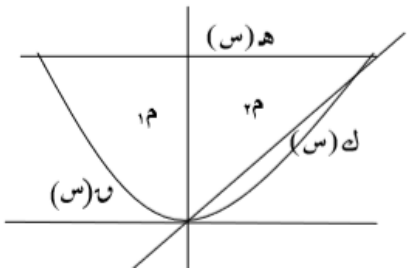
$$م = \frac{٤\sqrt{٨}}{٣} - \frac{١٠}{٣} + \frac{١٠}{٣} = \frac{٤\sqrt{٨}}{٣}$$ وحدة مساحة

السؤال السادس:

$ن(س) = هـ(س) \leftarrow س = \pm ٢$

$ن(س) = ك(س) \leftarrow س^{٢} = ٢س \leftarrow س = ٠$ أو $س = ٢$

$هـ(س) = ك(س) \leftarrow س = ٢$



$م = م_{١} + م_{٢}$

$$م = \int_{-٢}^{٠} \left(هـ(س) - ن(س) \right) د س = \int_{-٢}^{٠} \left(٤ - س^{٢} \right) د س$$

$$= ٤(٠+٢) + \frac{٠ - (٢^{-})}{٣} = ٨ - \frac{٨}{٣} = \frac{١٦}{٣}$$ وحدة مساحة

$$م = \int_{٠}^{٢} \left(هـ(س) - ك(س) \right) د س$$

$$= \int_{٠}^{٢} (٤ - ٢س) د س = ٤(٢-٠) - ٢ \times \frac{٤ - ٠}{٢} = ٤$$ وحدة مساحة

$$م = \frac{١٦}{٣} + ٤ = \frac{٢٨}{٣}$$ وحدة مساحة

شركة الراتب للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبدالرحمن فقير
00970568-952714

تمارين (٥-٥ب) صفحة ١٩٩

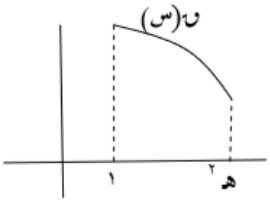
السؤال الأول: $ن(س)=٤$ ومحوري السينات والصادات والمستقيم س=٥ حول السينات

الحل : $ع=\pi\int_{ب}^{أ} ن(س)^{٢}\,ءس=\pi\int_{٠}^{٥} ١٦\,ءس$

$=١٦\pi(٥-٠)=٨٠\pi$ وحدة حجم

السؤال الثاني:

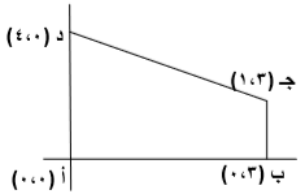
$ن(س)=\frac{٤}{\sqrt{س}}$ ومحور السينات والمستقيمين س $=١$، س $=هـ^{٢}$ حول السينات



الحل : $ع=\pi\int_{١}^{هـ^{٢}} ن(س)^{٢}\,ءس=\pi\int_{١}^{هـ^{٢}} \frac{١٦}{س}\,ءس$

$=١٦\pi\left(لـو_{هـ}هـ^{٢}-لـو_{هـ}١\right)=١٦\pi(٢-٠)=٣٢\pi$ وحدة حجم

السؤال الثالث:



معادلة المستقيم جـ د هي

$\frac{ص-٤}{س-٠}=\frac{١-٤}{٠-٣}\leftarrow\frac{ص-٤}{س-٠}=-١\leftarrow ص=-س+٤$

$ع=\pi\int_{٠}^{٣} (-س+٤)^{٢}\,ءس=\left|\frac{\pi(-س+٤)^{٣}}{-١\times٣}\right|_{٠}^{٣}$

$\frac{-\pi}{٣}(١-٤^{٣})=\frac{\pi٦٣}{٣}=٢١\pi$ وحدة حجم

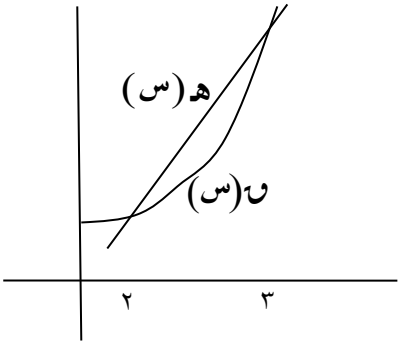
السؤال الرابع :

$ن(س)=س^{٢}+٦$ ، $هـ(س)=٥س$ حول السينات

الحل : نجد نقاط التقاطع بين ن(س) ، هـ(س)

$س^{٢}+٦=٥س\leftarrow س^{٢}-٥س+٦=٠$

$\Leftarrow (س-٢)(س-٣)=٠\leftarrow$ س $=٢$ ، س $=٣$

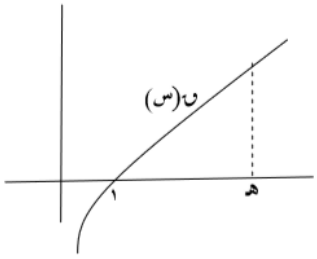


$$= \pi \int_{٢}^{٣} \left(هـ^{٢(س)} - ن^{٢}(س) \right) ى س$$

$$= \pi \int_{٢}^{٣} \left(٢٥ س^{٢} - \left(س^{٤} + ١٢ س^{٢} + ٣٦ \right) \right) ى س = \pi \int_{٢}^{٣} \left(١٣ س^{٢} - س^{٤} - ٣٦ \right) ى س$$

$$= \pi \left(١٣ \times \frac{٣^{٣} - ٢^{٣}}{٣} - \frac{٣^{٥} - ٢^{٥}}{٥} - ٣٦(٣ - ٢) \right) = \frac{\pi ٦٢}{١٥} \text{ وحدة حجم}$$

السؤال الخامس:



ن(س)=لـو$_{هـ}$ س ومحور السينات ، س = ١، س = هـ

ع = $\pi \int_{١}^{هـ} ن^{٢}(س) ى س = \pi \int_{١}^{هـ} (لـو_{هـ} س)^{٢} ى س$ بالتعويض

نفرض أن

ص=لـو$_{هـ}$ س ⇐ س = هـ^{ص}

ى ص=$\frac{١}{س}$ ى س ⇐ هـ^{ص} ى ص = ى س

عندما س=١ ⇐ ص = ٠ ، س=هـ ⇐ ص = ١

ع = $\pi \int_{٠}^{١} ص^{٢} \times هـ^{ص}$ ى س نكامل بالأجزاء

نفرض أن ن(س)=ص^{٢} ⇐ ى ن = ٢ص ى ص

ونفرض أن ى و = هـ^{ص} ى ص ⇐ و = هـ^{ص}

$$ع = \pi \left(ص^{٢} هـ^{ص} \Big|_{٠}^{١} - \int_{٠}^{١} ٢ص \times هـ^{ص} ى ص \right) = \pi \left(هـ - ٠ - \int_{٠}^{١} ٢ص \times هـ^{ص} ى ص \right)$$

نجد $\int_{٠}^{١} ٢ص \times هـ^{ص}$ ى ص بالأجزاء

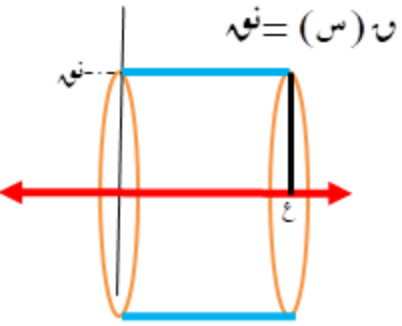
نفرض أن ن=٢ص ⇐ ى ن = ٢ى ص ، ى و = هـ^{ص} ى ص ⇐ و = هـ^{ص}

$$\int_{٠}^{١} ٢ص \times هـ^{ص} ى ص = ٢ص \times هـ^{ص} \Big|_{٠}^{١} - \int_{٠}^{١} ٢هـ^{ص} ى ص = ٢هـ - ٠ - ٢(هـ - ١) = ٢$$

ع = π (هـ − ٢) وحدة حجم

شركة الرائد للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبدالرحمن شقير
00970568-952714

السؤال السادس :



الحل: نجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحصورة بين ن(س)=نهـ ومحوري الاحداثيات والمستقيم س = ع دورة كاملة حول محور السينات

$$ح = \pi \int_{٠}^{ع} ن^{٢}(س)\,د س = \pi \int_{٠}^{ع} نهـ^{٢س}\,د س$$

$$= \pi نهـ^{٢}(ع - ٠) = \pi نهـ^{٢ع}$$ وحدة حجم

السؤال السابع:

$$ن(س) = \frac{٤}{\sqrt{٨س^{٢} - ١}}$$ ومحور السينات والمستقيمين

س=٢ ، س=٣ دورة كاملة حول محور السينات

الحل : $$ح = \pi \int_{٢}^{٣} ن^{٢}(س)\,د س = \pi \int_{٢}^{٣} \frac{١٦}{٨س^{٢} - ١}\,د س$$

$$= \pi \int_{٢}^{٣} \frac{١٦}{(س - ١)(س + ١)}\,د س$$ نكامل بالكسور الجزئية

$$\frac{١٦}{(س - ١)(س + ١)} = \frac{أ}{س - ١} + \frac{ب}{س + ١}$$

$$١٦ = أ(س + ١) + ب(س - ١) \leftarrow$$

عندما س = ١ $\Leftarrow$ ١٦ = ٢أ $\Leftarrow$ أ = ٨ ، س = -١ $\Leftarrow$ ١٦ = -٢ب $\Leftarrow$ ب = -٨

$$ح = \pi \left(\int_{٢}^{٣} \frac{٨}{س - ١}\,د س + \int_{٢}^{٣} \frac{-٨}{س + ١}\,د س \right)$$

$$ح = \pi \left(٨(لـو_{هـ}(٣ - ١) - لـو_{هـ}(٢ - ١)) - ٨(لـو_{هـ}(٣ + ١) - لـو_{هـ}(٢ + ١)) \right)$$

$$= \pi ٨ لـو_{هـ} ٣ - \pi ٨ لـو_{هـ} ٢ = \pi ٨ (لـو_{هـ} \frac{٣}{٢})$$ وحدة حجم

تمارين عامة (الوحدة الخامسة) صفحة ٢٠٠

الرقم	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
رمز الاجابة	ب	أ	ج	أ	د	ج	ب	ب	ج	ج

السؤال الثاني :

$\sigma_{١٢}$ ، $س_{٣} = ٧$ ، $[أ، ب]$ جد $أ، ب$

$$س_{ر} = أ + \frac{ب - أ}{ن} ر$$

$$س_{٦} = أ + \frac{ب - أ}{١٢} \times ٦ \leftarrow ١٢ = أ + \frac{ب - أ}{٢} \leftarrow ٢٤ = أ + ب \quad \text{-----(١)}$$

$$س_{٣} = أ + \frac{ب - أ}{١٢} \times ٣ \leftarrow ٧ = أ + \frac{ب - أ}{٤} \leftarrow ٢٨ = ٣أ + ب \quad \text{-----(٢)}$$

$٢٨ = ٣أ + ب$

$٢٤ = أ + ب$

$$٤ = ٢أ \leftarrow أ = ٢ \Leftarrow ٢٤ = ٢ + ب \leftarrow ب = ٢٢$$

السؤال الثالث:

$هـ(س) = ٣ن(س) + س$

$(\sigma_{٤}، ن(س))$ ، $س \in [٠، ٢]$ ، $٦ =$

$$(\sigma_{٤}، ن(س)) = \frac{١٠ - ٢}{٤} = ٢ \Leftarrow ٦ = ٢ \sum_{ر=١}^{٤} ن(س_{ر}^{*}) \Leftarrow ٣ = \sum_{ر=١}^{٤} ن(س_{ر})$$

$$(\sigma_{٤}، هـ(س)) = \frac{١٠ - ٢}{٤} = ٢ \sum_{ر=١}^{٤} هـ(س_{ر}^{*}) = ٢ \sum_{ر=١}^{٤} (٣ن(س_{ر}^{*}) + س_{ر}^{*})$$

$$= ٦ \sum_{ر=١}^{٤} ن(س_{ر}) + ٢ \sum_{ر=١}^{٤} س_{ر} = ٦ \times ٣ + ٢ \sum_{ر=١}^{٤} (٢ر + ٢)$$

$$= ١٨ + ٢\left(٢ \times ٤ + ٢ \frac{٤ \times (١ + ٤)}{٢}\right) = ١٨ + ٥٦ = ٧٤$$

السؤال الرابع:

$$ن(س) = ٣س ، [٠،١] ، س_ر^* = س_ر$$

$$ق(ن(س)، σ_٤) = \sum_{ر=١}^{ن} ن(س_ر^*) \frac{ب - ا}{ن}$$

$$= \sum_{ر=١}^{ن} ٣ س_ر \times \frac{٤}{ن} = \sum_{ر=١}^{ن} \left(١ + ر\frac{٤}{ن}\right)\frac{١٢}{ن} = \left(ن + \frac{٤}{ن} \times \frac{ن(ن+١)}{٢}\right)\frac{١٢}{ن} = \frac{١٢}{ن}(٢ + ن٢ + ن) = \frac{٢٤}{ن} + ٣٦ = (٢ + ن٣)\frac{١٢}{ن}$$

$$\int_{١}^{٢} ٣س\,دس = \lim_{ن(س)\to\infty} ق(ن(س)، σ_ن) = \lim_{ن(س)\to\infty} \left(\frac{٢٤}{ن} + ٣٦\right) = ٣٦$$

شركة الراتب للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبدالرحمن شقير
00970568-952714

السؤال الخامس :

نفرض أن $ن(س) = \sqrt{٤ - س^٢}$ ، $س \in [-٢، ٢]$

نجد القيم القصوى

$$ن'(س) = \frac{-س}{\sqrt{٤ - س^٢}} = ٠ \Leftarrow س = ٠$$ **ومنها تكون قيم س الحرجة هي : س=-٢ ، ٠ ، ٢**

$$ن(-٢) = \sqrt{٤ - (-٢)^٢} = ٠ ، ن(٠) = \sqrt{٤ - (٠)^٢} = ٢ ، ن(٢) = \sqrt{٤ - (٢)^٢} = ٠$$

اذن

$$٠ \le ن(س) \le ٢ \leftarrow \int_{-٢}^{٢} (٠)\,دس \le \int_{-٢}^{٢} ن(س)\,دس \le \int_{-٢}^{٢} ٢\,دس \leftarrow ٠ \le \int_{-٢}^{٢} \sqrt{٤ - س^٢}\,دس \le ٨$$

حل آخر: يمكن حل السؤال باستخدام المتباينات

$-٢ \le س \le ٢$ **ومنها** $٠ \le س^٢ \le ٤$

$-٤ \le -س^٢ \le ٠$ **وبإضافة ٤ ينتج أن** $٠ \le ٤ - س^٢ \le ٤$

فيكون $٠ \le \sqrt{٤ - س^٢} \le ٢$ **ومنها** $\int_{-٢}^{٢} ٠\,دس \le \int_{-٢}^{٢} \sqrt{٤ - س^٢}\,دس \le \int_{-٢}^{٢} ٢\,دس$

وينتج أن ≥ 0 $\int_{-2}^{2} \sqrt{4-س^2}\, دس \geq 8$

السؤال السادس :

$\int_{ب}^{س} ن(س) دس = س^2 - \sqrt{س} \leftarrow ت(س) = س^2 - \sqrt{س}$

$ن(س) = ت'(س) = 2س - \frac{1}{2\sqrt{س}} \leftarrow ن(4) = 8 - \frac{1}{4} = 7\frac{3}{4}$

$ن'(س) = 2 - \frac{1}{2} \times \frac{-1}{2} س^{\frac{-3}{2}}$

$ن'(س) = 2 + \frac{1}{4} \times \frac{1}{س^{\frac{3}{2}}} \leftarrow ن'(4) = 2 + \frac{1}{4} \times \frac{1}{8} = \frac{65}{32}$

السؤال السابع:

ت(2)=0 ومنها 8+4جـ =0 إذن جـ =-2

ت(س) متصل عند س=3

أ) $\lim_{س \to 3^+} ت(س) = \lim_{س \to 3^-} ت(س)$

$3أ - ب = 18 + 2 \times 2^{-} \times 3 \leftarrow 3أ - ب = 6$ **------(1)**

$ن(س) = ت'(س) = \begin{cases} 4س + 4^{-} & ، 2 < س \geq 3 \\ أ & ، 3 < س \geq 5 \end{cases}$

$ت'(3)^{+} = ت'(3)^{-} \leftarrow أ = 8$ **نعوض قيمة أ في معادلة (1) فنحصل على ما يلي :**

$3 \times 8 - ب = 6 \leftarrow ب = 18$

ب) $\int_{2}^{4} ن(س) دس = ت(4) - ت(2) = (8 \times 4 - 18) - (0) = 14$

السؤال الثامن :

أ) $\int_{1}^{2} 6(س-2)^2 (س-1)^5 دس$ ، **نفرض ان** $ص = س - 1 \leftarrow س = ص + 1$

$دص = دس$ ، $س = 1 \leftarrow ص = 0$ ، $س = 2 \leftarrow ص = 1$

شركة الراتب للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبدالرحمن شاهين
00970568-952714

$$\int_{1}^{2} ٦٥(س-٢)^{٢}(س-١)^{٥}\,ds = \int_{0}^{1} ٦٥(ص+١-٢)^{٢}(ص)^{٥}\,dص$$

$$= \int_{0}^{1} ٦٥(ص-١)^{٢}(ص)^{٥}\,dص = \int_{0}^{1} ٦٥(ص^{٢}-٢ص+١)ص^{٥}\,dص$$

$$= \int_{0}^{1} (٦٥ص^{٧}-١١٢ص^{٦}+٦٥ص^{٥})\,dص = ٧ص^{٨}-١٦ص^{٧}+\frac{٢٨}{٣}ص^{٦}\Big|_{0}^{1} = \frac{١}{٣}$$

ب) $\int_{هـ}^{هـ^{٢}} لـو_{هـ} س\,ds$ نفرض ان $ن = لـو_{هـ} س \leftarrow dن = \frac{١}{س}ds$ ، $و = س$

$$\int_{هـ}^{هـ^{٢}} لـو_{هـ} س\,ds = س لـو_{هـ} س\Big|_{هـ}^{هـ^{٢}} - \int_{هـ}^{هـ^{٢}} \frac{١}{س}\times س\,ds = ٢هـ^{٢} - هـ - هـ^{٢} + هـ = هـ^{٢}$$

ج) $\int_{٣}^{٠} \frac{س+٥}{س^{٢}-س}\,ds = \int_{٣}^{٠} \frac{س+٥}{س(س-١)}\,ds$

$$\frac{س+٥}{س(س-١)} = \frac{أ}{س} + \frac{ب}{س-١} \leftarrow س+٥ = أ(س-١) + بس$$

عندما $س = ٠ \leftarrow ٥ = -أ \leftarrow أ = -٥$ ، $س = ١ \leftarrow ١+٥ = ب \leftarrow ب = ٦$

$$\int_{٣}^{٠} \frac{س+٥}{س^{٢}-س}\,ds = \int_{٣}^{٠} \frac{س+٥}{س(س-١)}\,ds = \int_{٣}^{٠} \frac{-٥}{س}\,ds + \int_{٣}^{٠} \frac{ب}{س-١}\,ds$$

$$= -\int_{٣}^{٠} \frac{٥}{س}\,ds + \int_{٣}^{٠} \frac{٦}{س-١}\,ds = -٥(لـو_{هـ} ٥ - لـو_{هـ} ٣) + ٦(لـو_{هـ} ٤ - لـو_{هـ} ٢)$$

$$= ٥لـو_{هـ} \frac{٣}{٥} + ٦لـو_{هـ} ٢$$

د) $\int_{0}^{2} س\sqrt{س^{٤}+س^{٢}}\,ds = \int_{0}^{2} |س|\sqrt{س^{٢}+١}\,ds = \int_{0}^{2} س\sqrt{س^{٢}+١}\,ds$ نكامل بالتعويض

نفرض ان $ص = س^{٢} + ١ \leftarrow د ص = ٢ س د س \leftarrow د س = \frac{د ص}{٢ س}$

عندما $س = ٠ \leftarrow ص = ١$ ، عندما $س = ٢ \leftarrow ص = ٥$ ،

$$\int_{٠}^{٢} س \sqrt{س^{٤} + س^{٢}}\, د س = \int_{١}^{٥} س \sqrt{س^{٢} + ١}\, \frac{د ص}{٢ س} = \int_{١}^{٥} \frac{١}{٢} \sqrt{ص}\, د ص = \frac{١}{٣}\left[ص^{\frac{٣}{٢}} \right]_{١}^{٥} = \frac{١}{٣}\left(\left(\sqrt{٥}\right)^{٣} - ١ \right)$$

هـ) $$\int_{١}^{٢} \frac{١}{س^{٢} \sqrt{س^{٢} + ١}}\, د س = \int_{١}^{٢} \frac{١}{س^{٣} \times \sqrt{\frac{١}{س^{٢}} + ١}}\, د س$$ نكامل بالتعويض

نفرض ان $ص = ١ + \frac{١}{س^{٢}} \leftarrow د ص = \frac{-٢ س}{س^{٤}} د س \leftarrow \frac{-س^{٣}}{٢} د ص = د س$

$$\int \frac{١}{س^{٢} \sqrt{س^{٢} + ١}}\, د س = \int \frac{١}{س^{٣} \times \sqrt{\frac{١}{س^{٢}} + ١}}\, د س = \frac{-١}{٢} \int \frac{١}{\sqrt{ص}}\, د ص$$

$$= \frac{-١}{٢} \int ص^{-\frac{١}{٢}}\, د ص = -\sqrt{ص}$$

$$\therefore \int_{١}^{٢} \frac{١}{س^{٢} \sqrt{س^{٢} + ١}}\, د س = -\left[\sqrt{\frac{١}{س^{٢}} + ١} \right]_{١}^{٢} = \frac{-\sqrt{٥} + ٢\sqrt{٢}}{٢}$$

السؤال التاسع :

$$\int_{٧}^{٣} ق(س - ٢)\, د س = \int_{٥}^{١} ق(س)\, د س$$ وذلك بفرض ان $ص = س - ٢ \leftarrow د ص = د س$

عندما $س = ٧ \leftarrow ص = ٥$ ، وعندما $س = ٣ \leftarrow ص = ١$

$$\int_{٣}^{-١} هـ(س + ٢)\, د س = \int_{٥}^{١} هـ(س)\, د س$$ وذلك بفرض ان $ص = س + ٢ \leftarrow د ص = د س$

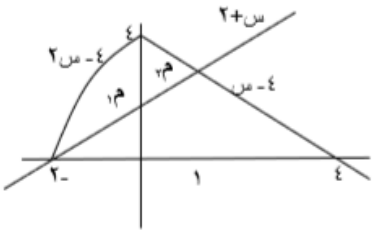
عندما $س = ٣ \leftarrow ص = ٥$ ، وعندما $س = -١ \leftarrow ص = ١$

$$\text{ن}(س) \le \text{هـ}(س)\ ،\ س \in [0،1] \rightarrow \int_{1}^{0} \text{ن}(س)\,ds \le \int_{1}^{0} \text{هـ}(س)\,ds$$

$$\rightarrow -\int_{1}^{0} \text{ن}(س)\,ds \ge -\int_{1}^{0} \text{هـ}(س)\,ds \rightarrow \int_{1}^{0} \text{ن}(س)\,ds \ge \int_{1}^{0} \text{هـ}(س)\,ds$$

$$\rightarrow \int_{7}^{3} \text{ن}(س-2)\,ds \ge \int_{3}^{1-} \text{هـ}(س+2)\,ds \quad \text{وهو المطلوب}$$

السؤال العاشر :



١) نجد نقاط تقاطع ن(س) ، هـ(س) عندما

$$س \ge 0 \rightarrow س+2 = 4 - س^{2} \rightarrow س^{2} + س - 2 = 0$$
$$(س+2)(س-1) = 0 \rightarrow س = -2 \ ،\ س = 1 \text{ ترفض}$$

$$\rightarrow م_{1} = \int_{2-}^{0} \left(4 - س^{2} - س - 2\right) ds = \int_{2-}^{0} \left(2 - س^{2} - س\right) ds$$

$$= 2(0+2) - \frac{0-(-2)^{3}}{3} - \frac{0-(-2)^{2}}{2} = \frac{10}{3} \text{ وحدة مساحة}$$

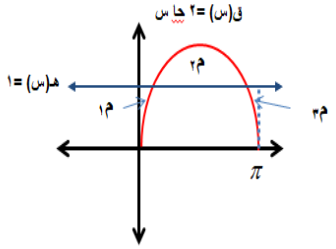
عندما $س > 0 \rightarrow س+2 = 4 - س \rightarrow 2س = 2 \rightarrow س = 1$

$$\rightarrow م_{2} = \int_{0}^{1} (4 - س - س - 2)\,ds = \int_{0}^{1} (2 - 2س)\,ds$$

$$= 2(1-0) - 2 \times \frac{0-1}{2} = 2 - 1 = 1 \text{ وحدة مساحة}$$

م = م١ + م٢ = $1 + \frac{10}{3} = \frac{13}{3}$ **وحدة مساحة**

٢) $\text{ن}(س) = 2جاس$ ، $\text{هـ}(س) = 1$ ، $س \in [0، \pi]$



$$\text{ن}(س) = \text{هـ}(س) \rightarrow 2جاس = 1 \rightarrow جاس = \frac{1}{2}$$

$س = \frac{\pi}{٦}$ ، $س = \frac{\pi ٥}{٦}$

م = م١ + م٢ + م٣

$م_{١} = \int_{٠}^{\frac{\pi}{٦}} (١ - ٢جاس) ءس = س + ٢جتاس \Big|_{٠}^{\frac{\pi}{٦}} = \frac{\pi}{٦} + \sqrt{٣} - ٢$ **وحدة مساحة**

$م_{٢} = \int_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi ٥}{٦}} (٢جاس - ١) ءس = -٢جتاس - س \Big|_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi ٥}{٦}} = ٢\sqrt{٣} - \frac{\pi ٢}{٣}$ **وحدة مساحة**

$م_{٣} = \int_{\frac{\pi ٥}{٦}}^{\pi} (١ - ٢جاس) ءس = س + ٢جتاس \Big|_{\frac{\pi ٥}{٦}}^{\pi} = \frac{\pi}{٦} + \sqrt{٣} - ٢$ **وحدة مساحة**

$م = ٢(\frac{\pi}{٦} + \sqrt{٣} - ٢) + ٢\sqrt{٣} - \frac{\pi ٢}{٣} = ٤\sqrt{٣} - \frac{\pi}{٣} - ٤$ **وحدة مساحة**

السؤال الحادي عشر :

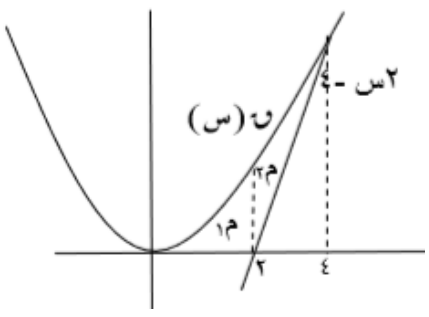
$\int_{١}^{٣} (جا^{٢}س + هـ^{س}) ءس = ا$ ، $\int_{١}^{٣} جتا^{٢}س ءس = ب$

$ا + ب = \int_{١}^{٣} (جا^{٢}س + هـ^{س}) ءس + \int_{١}^{٣} جتا^{٢}س ءس$

$= \int_{١}^{٣} (جا^{٢}س + جتا^{٢}س + هـ^{س}) ءس$

$= \int_{١}^{٣} (١ + هـ^{س}) ءس = ١(٣ - ١) + هـ^{٣} - هـ^{١} = ٢ + هـ^{٣} - هـ$

السؤال الثاني عشر :



ن(س) = $\frac{١}{٤}$ س^{٢} والمماس المرسوم له عند (٤، ٤)

ومحور السينات

ن′(س) = $\frac{١}{٢}$ س ← ميل المماس = ن′(٤) = ٢

شركة الرائد للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبدالرحمن شقير
00970568-952714

معادلة المماس هي ص-٤=٢(س-٤)

ص=٢س-٤

م = م١ + م٢

$$م = \int_{0}^{2} ق(س)\,ص\,س = \int_{0}^{2} \frac{1}{4} س^{2}\,س$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{2^{3}-0^{3}}{3}\right) = \frac{2}{3}\text{ وحدة مساحة}$$

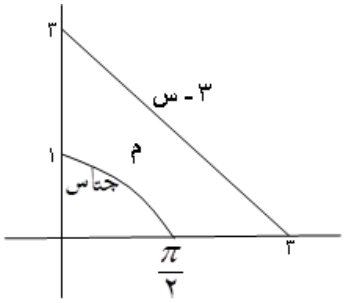
$$م = \int_{2}^{4} (ق(س) - ص)\,س = \int_{2}^{4} \left(\frac{1}{4} س^{2} - 2س + 4\right)س$$

$$= \frac{1}{4}\times\frac{4^{3}-2^{3}}{3} - \frac{4^{2}-2^{2}}{2}\times 2 + 4(4-2) = \frac{2}{3}\text{ وحدة مساحة}$$

$$م = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}\text{ وحدة مساحة}$$

السؤال الثالث عشر:

ق(س) =جتاس ، ص = ٣ − س والمحورين الاحداثيين



$$م = \int_{0}^{3} (3-س)\,س - \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} جتاس\,س$$

$$= 3(3-0) - \frac{3^{2}-0^{2}}{2} - \left(جا\left(\frac{\pi}{2}\right) - جا(0)\right)$$

$$= 9 - \frac{9}{2} - 1 = \frac{7}{2}\text{ وحدة مساحة}$$

السؤال الرابع عشر:

أ) ف(٥) = بعد الجسم عن النقطة وعندما ن=٥ ثواني

$$ف(5) = \int_{0}^{2} ع(ن)\,ن = \int_{0}^{2} 5ن^{2}\,ن + \int_{2}^{12} (24 - 2ن)\,ن$$

$$= 5\times\frac{2^{3}-0^{3}}{3} + 24(2-0) - 2\times\frac{144-25}{2}$$

$$= 1 + \frac{40}{3} = \frac{153+40}{3} = \frac{193}{3}\text{ م}$$

ب) ع(ن) = ٠ عندما ٠ ≤ ن ≤ ١٢ ← $5ن^{2}$ = ٠ ← ن = ٠

عندما ٢ < ن ≤ ١٢ ← ٢٤ − ٢ن = ٠ ← ن = ١٢ يتوقف الجسم عن الحركة عندما ن=١٢

شركة الرائد للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبدالرحمن شقير
00970568-952714

$$ف(١٢) = \int_{٠}^{١٢} ٤(ن)\,دن = ن^{٢}\,٥ن \Big]_{٠}^{١٢} + (٢٤ - ٢ن)\,دن \Big]_{٢}^{١٢}$$

$$= \frac{٤٠}{٣} + ٢٤٠ - ١٤٠ = ١٠٠ + \frac{٤٠}{٣} = \frac{٣٤٠}{٣}$$ وحدة مسافة

السؤال الخامس عشر:

$$ن'(س) = ن(س)\,،\ ن(س) \neq ٠$$

أ) نفرض ان $ص = ن(س) \leftarrow دص = ن'(س)\,دس \leftarrow دس = \frac{دص}{ن'(س)} \leftarrow \frac{دص}{ص} = دس$

$$\int (ن(س))^{ن}\,دس = \int ص^{ن} \times \frac{دص}{ص} = \int ص^{ن-١} \times دص$$

$$= \frac{ص^{ن}}{ن} + جـ = \frac{١}{ن}(ن(س))^{ن} + جـ \quad :\ جـ \in ع$$

ب) $ن'(س) = ن(س) \leftarrow \frac{ن'(س)}{ن(س)} = ١$

$$\int \frac{ن'(س)}{ن(س)}\,دس = \int ١\,دس \leftarrow لـو_{هـ}|ن(س)| = س + جـ$$

$$|ن(س)| = هـ^{س+جـ} \leftarrow ن(س) = \mp هـ^{س}$$

السؤال السادس عشر :

$$\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{جا٢س}{س + ١}\,دس = أ \text{ ما قيمة } \int_{٠}^{\pi} \frac{جتاس}{(س + ٢)^{٢}}\,دس$$

نفرض ان $ص = ٢س \leftarrow س = \frac{ص}{٢} \leftarrow دس = \frac{دص}{٢}$

عندما $س = \frac{\pi}{٢} \leftarrow ص = \pi\ ،\ س = ٠ \leftarrow ص = ٠$

$$\text{ا} = \int_{\text{ب}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{جا}2\text{س}}{\text{س}+1}\,\text{د س} = \int_{\text{ب}}^{\pi} \frac{\text{جاص}}{\frac{\text{ص}}{2}+1} \times \frac{\text{د ص}}{2} \leftarrow \text{ا} = \int_{\text{ب}}^{\pi} \frac{\text{جاص}}{\text{ص}+2} \times \text{د ص}$$

$$\int_{\text{ب}}^{\pi} \frac{\text{جتاس}}{(\text{س}+2)^2}\,\text{د س} = \int_{\text{ب}}^{\pi} (\text{س}+2)^{-2} \text{جتاس}\,\text{د س} \quad \textbf{نكامل بالاجزاء}$$

نفرض ان $\text{ب}(\text{س}) = \text{جتاس} \leftarrow \text{د ب} = -\text{جاس د س}$

$$\text{د هـ} = (\text{س}+2)^{-2}\text{د س} \leftarrow \text{هـ} = -(\text{س}+2)^{-1}$$

$$\int_{\text{ب}}^{\pi} \frac{\text{جتاس}}{(\text{س}+2)^2}\,\text{د س} = \left| \frac{-\text{جتاس}}{(\text{س}+2)} \right|_{\text{ب}}^{\pi} - \int_{\text{ب}}^{\pi} \frac{\text{جاس}}{\text{س}+2}\,\text{د س} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2+\pi} - \text{ا}$$

السؤال السابع عشر:

$$\int_{1}^{3} \frac{\text{س ك}'(\text{س}) - \text{ك}(\text{س})}{\text{س}^2}\,\text{د س} = \int_{1}^{3} \frac{\text{س ك}'(\text{س})}{\text{س}^2}\,\text{د س} - \int_{1}^{3} \frac{\text{ك}(\text{س})}{\text{س}^2}\,\text{د س}$$

نكامل الجزء الأول بالأجزاء $\int_{1}^{3} \frac{\text{س ك}'(\text{س})}{\text{س}^2}\,\text{د س}$

نفرض أن: $\text{ب} = \frac{1}{\text{س}}$ $\quad$ $\text{د ع} = \text{ك}'(\text{س})\,\text{د س}$

$\therefore \text{د ب} = \frac{-1}{\text{س}^2}\,\text{د س}$ $\quad$ $\text{ع} = \text{ك}(\text{س})$

فيكون $\int_{1}^{3} \frac{\text{س ك}'(\text{س}) - \text{ك}(\text{س})}{\text{س}^2}\,\text{د س} = \left| \frac{\text{ك}(\text{س})}{\text{س}} \right|_{1}^{3} + \int_{1}^{3} \frac{\text{ك}(\text{س})}{\text{س}^2}\,\text{د س} - \int_{1}^{3} \frac{\text{ك}(\text{س})}{\text{س}^2}\,\text{د س}$

ومنها $\int_{1}^{3} \frac{\text{س ك}'(\text{س})}{\text{س}^2}\,\text{د س} = \frac{\text{ك}(3)}{3} - \frac{\text{ك}(1)}{1} = -2 - \frac{6}{3} = 0$

حل آخر: نفرض ان $\text{ب}(\text{س}) = \frac{\text{ك}(\text{س})}{\text{س}} \leftarrow \text{ب}'(\text{س}) = \frac{\text{س ك}'(\text{س}) - \text{ك}(\text{س}) \times 1}{\text{س}^2}$

$$\int_{1}^{3} \frac{\text{س ك}'(\text{س}) - \text{ك}(\text{س})}{\text{س}^2}\,\text{د س} = \int_{1}^{3} \text{ب}'(\text{س})\,\text{د س} = \text{ب}(3) - \text{ب}(1)$$

$$ك(٣) = ٣ك(١) = ٦ \leftarrow ك(٣) = ٣ك(١) = ٦ \text{ ، } ك(١) = ٢ \frac{ك(٣)}{٣} - \frac{ك(١)}{١} = ٢ - \frac{٦}{٣} = ٠$$

السؤال الثامن عشر :

$س ص = ٤ + س^{٢}$ ومحور السينات و المستقيمين س=١ ، س=٤

الحل : $س ص = ٤ + س^{٢} \leftarrow س^{٢} ص^{٢} = (٤ + س^{٢})^{٢} \leftarrow ص^{٢} = \frac{١٦ + ٨ س^{٢} + س^{٤}}{س^{٢}}$

$$ص^{٢} = ١٦ س^{-٢} + ٨ + س^{٢}$$

$$ع = \pi \int_{١}^{٤} ص^{٢} ؘس = \pi \int_{١}^{٤} (١٦ س^{-٢} + ٨ + س^{٢}) ؘس$$

$$= \pi \left(\frac{-١٦}{س} + ٨ س + \frac{س^{٣}}{٣} \right|_{١}^{٤}) = \pi \left((-٤ + ٣٢ + \frac{٦٤}{٣}) - (-١٦ + ٨ + \frac{١}{٣}) \right)$$

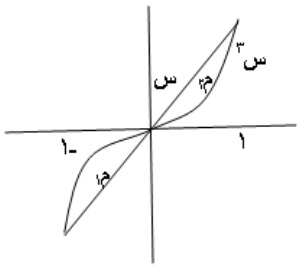
$$= ٥٧ \pi \text{ وحدة حجم}$$

السؤال التاسع عشر : $ص_{١} = ظاس$ ، $ص_{٢} = قاس$ ، $س = \frac{\pi}{٣}$ ، $س = \frac{\pi}{٦}$

$$ظاس = قاس \leftarrow جاس = ١ \leftarrow س = \frac{\pi}{٢} \notin \left[\frac{\pi}{٦} ، \frac{\pi}{٣} \right]$$

$$ع = \pi \int_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi}{٣}} (قا^{٢} س - ظا^{٢} س) ؘس = \pi \int_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi}{٣}} ١ ؘس = \pi \left(\frac{\pi}{٣} - \frac{\pi}{٦} \right) = \frac{\pi}{٦}^{٢} \text{ وحدة حجم}$$

السؤال العشرون :



$$ع = ع_{١} + ع_{٢} = ٢ ع_{١} = ٢ \pi \int_{-١}^{١} ((ص)^{٢} - (هـ(س))^{٢}) ؘس$$

$$= ٢ \pi \int_{٠}^{١} (س^{٢} - س^{٦}) ؘس = ٢ \pi \left(\frac{س^{٣}}{٣} - \frac{س^{٧}}{٧} \right|_{٠}^{١}) = \frac{٨ \pi}{٢١} \text{ وحدة حجم}$$

السؤال الحادي والعشرون :

معتمدا على الشكل المجاور اوجد $\int_{-1}^{2} س\,ص\,(س^{2}-3)\,ءس$ علما بأن م١=٤ ، م٢=١٢

الحل : نفرض ان : $ص = س^{2} - 3 \leftarrow ءص = 2س\,ءس \leftarrow ءس = \frac{ءص}{2س}$

عندما س = -١ فان ص = -٢ ، وعندما س = ٢ فان ص = ١

$$\int_{-1}^{2} س\,ص\,(س^{2}-3)\,ءس = \int_{-2}^{1} س\,ص\,(ص) \times \frac{ءص}{2س} = \int_{-2}^{1} \frac{1}{2}\,ص\,(ص)\,ءص$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{1} ص\,(ص)\,ءص + \int_{-1}^{1} ص\,(ص)\,ءص\right] = \frac{1}{2}(م_{1} + م_{2}) = \frac{1}{2}(12-4) = -4$$

حلول الوحدة السادسة(الأعداد المركبة)

تمارين ومسائل (٦-١) صفحة ٢٠٩

السؤال الأول: $2 + \sqrt{-2} = 2 + \sqrt{2}\,ت$

١) $\sqrt{-32} + \sqrt{-1} \times \sqrt{32} = \sqrt{-2} \times \sqrt{2} + \sqrt{-1} \times \sqrt{16}$

$= 4\sqrt{2}\,ت + \sqrt{2}\,ت = 5\sqrt{2}\,ت = 0 + 5\sqrt{2}\,ت$

٢) $\sqrt{-8} \times \sqrt{-1} \times \sqrt{8} = \sqrt{-2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{-1}$

$= 2\sqrt{2}\,ت \times \sqrt{2}\,ت = 4ت^{2} = 4 \times -1 = -4 = -4 + 0ت$

السؤال الثاني:

العدد المركب	الجزء الحقيقي	الجزء التخيلي
$-3 + ت^{\frac{2}{5}} = -3 - ت^{\frac{2}{5}}$	-٣	$\frac{2}{5}$
$\sqrt{-9} = \sqrt{9}\,ت = 0 + 3ت$	٠	٣
$-1 - \sqrt{-1} = -1 - ت$	١	-١
$\sqrt{-9} \times \sqrt{-4} = \sqrt{36}\,ت = 0 + 6ت$	٠	٦
$ت^{2} = 0 - 2$	٠	-٢
$\frac{1}{3} + 0ت = \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	٠

السؤال الثالث: البرهان : الطرف الأيمن :

$$= (1 + ت + ت^{2})^{3} (1 - ت + ت^{2})^{3}$$

$$= (1 - ت - 1)^{3} (1 - ت + 1)^{3}$$

$$= (-ت)^{3} (ت)^{3}$$

$$= -ت^{6} = -(ت^{2})^{3} = -1$$

= الطرف الأيسر

السؤال الرابع:

١) $ت^{43} = ت^{40} \times ت^{3} = (ت^{2})^{20} \times ت = 1 \times ت = -ت$

٢) $\frac{1}{ت^{65}} = ت^{-65} = ت^{-68} \times ت^{3} = (ت^{2})^{-34} \times ت$

$= 1 \times -ت = -ت$

٣) $ت^{27} + \frac{1}{ت^{27}} = ت^{27} + ت^{-27} = ت^{24} \times ت^{3} + ت^{-28} \times ت$

$= (ت^{2})^{12} \times ت + (ت^{2})^{-14} \times ت = -ت + ت = 0 = 0 + 0 = 0$

السؤال الخامس:

البرهان : الطرف الأيمن=

$$\frac{1 + 2ت + ت^{2} + ت^{3} + 2ت}{ت^{3} + ت^{4}} = \frac{1 + 2 \times ت - 1 + ت + 2ت}{ت^{3} (1 + ت)}$$

$$= \frac{-1 + ت}{-ت - ت^{2}} = \frac{(ت - 1)(-1)}{ت - 1} = -1$$

= الطرف الأيسر

تمارين ومسائل (٦-٢) صفحة ٢١٤

السؤال الأول:

أ) $٤(٢+٤ت)+٥(٣-٢ت)$

$= ٨+١٦ ا ت+١٥-١٠ ا ت = ٢٣+٦ت$

$(٣+٤ت)(٣-٥ت)$

$= ٩-٥ ا ت+٢ ا ت-٢٠ ت^{٢}$

$= ٩-٣ت-٢٠ \times -١ = ٢٩-٣ت$

$(٣+٤ت)^{٣} = (٣+٤ت)^{٢}(٣+٤ت)$

$= (٩+٢٤ت+١٦ ا ت^{٢})(٣+٤ت)$

ج) $= (٩-١٦+٢٤ت)(٣+٤ت)$

$= (-٧+٢٤ت)(٣+٤ت)$

$= -٢١-٢٨ت+٧٢ت+٩٦ت^{٢}$

$= -٢١-٩٦+٤٤ت = -١١٧+٤٤ت$

د) $٤ت(١-٥ت)^{٢} = ٤ت(١-١٠ ا ت+٢٥ت^{٢})$

$= ٤ت(١-٢٥-١٠ ا ت) = ٤ت(-٢٤-١٠ ا ت)$

$= -٩٦ت-٤٠ت^{٢} = -٤٠-٩٦ت$

و) $(١-ت)^{٦} = ((١-ت)^{٢})^{٣} = (١-٢ت+ت^{٢})^{٣}$

$= (١-٢ت-١)^{٣} = (-٢ت)^{٣} = -٨ت^{٣}$

$= -٨ \times -ت = ٨ت = ٨ت$

السؤال الثاني:

$س+٢ت = -٥(س-٤ت)$

بوضع $س = ا+بت$

$\Leftarrow ا+بت+٢ت(ا+بت) = -٥(ا+بت-٤ت)$

$ا+بت+٢اًت-٢ب = -اً-٢ب+(ا٢+ب)ت$

$= -١٥+(-٥ب+٢٠)ت$

$\Leftarrow ا-٢ب = -١٥$

$\therefore ا٦ = ٢ب \Leftarrow ب = ا٣$

$\Leftarrow ب+ا٢ = -٥ب+٢٠$

$\therefore ٦ب+ا٢ = ٢٠ \Leftarrow ا+٣ب = ١٠$

$\therefore ا+٣ \times ا٣ = ١٠ \Leftarrow ا١٠ = ١٠$

$\Leftarrow ا = ١،\ ب = ٣ \qquad \therefore س = ١+٣ت$

السؤال الثالث:

$س-ص-٢ = ص^{٢}ت-سٮت$

$\therefore س+سٮت = ص+٢+ص^{٢}ت$

شركة الرائد للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبدالرحمن شقير
00970568-952714

شركة الرائد للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبدالرحمن شلقين
00970568-952714

$\therefore$ س $=$ ص $+ ٢ \Leftarrow$ س $-$ ص $= ٢$

، س $=$ ص^{٢} $\Leftarrow$ ص $+ ٢ =$ ص^{٢}

$\Leftarrow$ ص$^{٢} -$ ص $- ٢ = ٠$

(ص $- ٢$)(ص $+ ١$) $= ٠$

$\therefore$ ص $= ٢ \Leftarrow$ س $= ٤$

، ص $= -١ \Leftarrow$ س $= ١$

السؤال الرابع:

الطرف الأيمن= ع^{٥} $+$ ع^{٢}

$=$ ت^{٥} $+$ ت^{٢} $=$ ت $+ -١$

الطرف الأيسر $=$ ع $- ١ =$ ت $+ -١$

السؤال الخامس:

الطرف الأيمن= ع^{٢} $+ ٢$ع $+ ٢$

$= (-١ +$ ت$)^{٢} + ٢(-١ +$ ت$) + ٢$

$=$ ١ $+$ ت$^{٢} -$ ٢ت $- ٢ +$ ٢ت $+ ٢$

$= ١ - ١ -$ ٢ت $- ٢ +$ ٢ت $+ ٢ = ٠$

= الطرف الأيسر

السؤال السادس:

$$\frac{\text{ت}}{\text{ت} + ٣} = \frac{١ + ٣\text{ت}}{\text{أ}}$$

$\Leftarrow$ أت $= ($ت $+ ٣)(١ + ٣$ت$)$

أت $=$ ت $+ ٣$ت$^{٢} + ٣ + ٩$ت

أت $= ١٠$ت $- ٣ + ٣$

$\Leftarrow$ أت $= ١٠$ت $\Leftarrow$ أ $= ١٠$

السؤال السابع:

١) $\left(٢ + \sqrt{٣}\text{ت}\right)^{-١} =$ س $+$ صت

$\Leftarrow \left(٢ + \sqrt{٣}\text{ت}\right)$(س $+$ صت$) = ١$

$\left(٢\text{س} + ٢\text{صت} + \sqrt{٣}\text{س}\text{ت} + \sqrt{٣}\text{صت}^{٢}\right) = ١ + ٠$ت

$٢\text{س} - \sqrt{٣}\text{ص} + \left(٢\text{ص} + \sqrt{٣}\text{س}\right)$ت $= ١ + ٠$ت

$\therefore ٢$ص $+ \sqrt{٣}$س $= ٠ \Leftarrow$ ص $= -\sqrt{٣}$س

٢س $- \sqrt{٣}$ص $= ١ \Leftarrow ٢$س $- ٢\sqrt{٣} \times -\sqrt{٣}$س $= ١$

$\therefore ٢$س $+ ٦$س $= ١ \Leftarrow ٨$س $= ١ \Leftarrow$ س $= \frac{١}{٨}$ ص $= -\sqrt{٣} \times \frac{١}{٨} = \frac{-\sqrt{٣}}{٨}$

$$\therefore \left(٢ + \sqrt{٢}\,ت\right)^{-١} = \frac{١}{٨} - \frac{\sqrt{٣}}{٨}ت$$

يمكن استخدام قاعدة النظير الضربي مباشرة

٢) $\left(\frac{ت}{٣ - ت}\right)^{-١} = س + صت$

$$\Leftarrow \left(\frac{ت}{٣ - ت}\right)(س + صت) = ١$$
$$ت(س + صت) = ٣ - ت$$
$$ت س + صت^{٢} = ٣ - ت$$
$$\therefore ت س - ص = ٣ - ت$$
$$\therefore س = ١ ،\ ص = ٣$$

$$\therefore \left(\frac{ت}{٣ - ت}\right)^{-١} = ١ + ٣ت$$

٣) $\left((١ + ت)^{١٣}\right)^{-١} = (١ + ت)^{-١٣}$

$$= (١ + ت)^{-١٤} \times (١ + ت)$$
$$= \left((١ + ت)^{٢}\right)^{-٧} \times (١ + ت)$$
$$= \left(١ + ٢ت + ت^{٢}\right)^{-٧} \times (١ + ت)$$
$$= (٢ت)^{-٧} \times (١ + ت)$$
$$= \frac{١}{١٢٨} \times ت^{-٨} \times ت \times (١ + ت)$$
$$= \frac{ت}{١٢٨} \times (١ + ت) = \frac{-١}{١٢٨} + \frac{١}{١٢٨}ت$$

السؤال الثامن:

بجمع المعادلتين ينتج أن:

$$ع_{١}٣ = \left(-٢\sqrt{٢} + ٥\sqrt{٠٫٢}\right)ت = -\left(\sqrt{٨} - \sqrt{٠٫٥}\right)ت = ٣\sqrt{٢}ت$$
$$\Leftarrow ع_{١} = \sqrt{٢}ت$$

بالتعويض في المعادلة الأولى ينتج أن:

$$ع_{٢}٣ = -\sqrt{٨}ت - \sqrt{٢}ت \Leftarrow ع_{٢}٣ + \sqrt{٢}ت = -\sqrt{٨}ت$$
$$\Leftarrow ع_{٢}٣ = -٢\sqrt{٢}ت - ٣\sqrt{٢}ت = -٣\sqrt{٢}ت$$
$$\Leftarrow ع_{٢} = -\sqrt{٢}ت$$

شركة الراتب للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبدالرحمن شقير
00970568-952714

تمارين ومسائل (٦-٣) صفحة ٢٢٠

السؤال الأول:

$$١ + \sqrt{-٤} = ١ + ٢ت$$

$$\therefore |١ + \sqrt{-٤}| = |١ + ٢ت|$$

$$= \sqrt{١^{٢} + ٢^{٢}}$$

$$= \sqrt{١ + ٤}$$

$$= \sqrt{٥}$$

السؤال الثاني:

أ) $|-٣ع_{١}| = |-٣ت - ٣| = \sqrt{(-٣)^{٢} + (-٣)^{٢}} = \sqrt{٩ + ٩} = \sqrt{١٨}$

ب) $ع_{١}\overline{ع_{١}} = (١ + ت)(١ - ت) = ١ - ت^{٢} = ٢$

$$\left|\frac{١}{٢}ع_{١}\overline{ع_{١}}\right| = |٢ \times \frac{١}{٢}| = |١| = ١$$

حل آخر:

$$\left|\frac{١}{٢}ع_{١}\overline{ع_{١}}\right| = \left|\frac{١}{٢}((١)^{٢} + (١)^{٢})\right|$$

$$= |٢ \times \frac{١}{٢}| = \sqrt{١} = ١$$

ج) $\frac{ع_{٢}}{ع_{١}} = \frac{١ - ت}{١ + ت} \times \frac{١ - ت}{١ - ت} = \frac{١ + ت^{٢} - ٢ت}{١ + ١}$

$$= \frac{-٢ت}{٢} = -ت$$

$$\therefore \left|\frac{ع_{٢}}{ع_{١}}\right| = |-ت| = \sqrt{(٠)^{٢} + (-١)^{٢}} = \sqrt{١} = ١$$

د) $ع_{١}ع_{٢} = (١ + ت)(١ - ت) = ١ - ت^{٢} = ٢$

$$|٢ع_{١}ع_{٢}| = |٢ \times ٢| = |٤| = \sqrt{(٤)^{٢} + (٠)^{٢}} = \sqrt{١٦} = ٤$$

حل آخر:

$$|٢ع_{١}ع_{٢}| = |٢((١)^{٢} + (١)^{٢})| = |٢ \times ٢|$$

$$= |٤| = \sqrt{(٤)^{٢} + (٠)^{٢}} = \sqrt{١٦} = ٤$$

السؤال الثالث: $ع = \frac{٣}{٥} - \frac{٤}{٥}ت$

اولا: $ع^{-١} = \frac{١}{\frac{٣}{٥} - \frac{٤}{٥}ت} = \frac{٥}{٣ - ٤ت} \times \frac{٣ + ٤ت}{٣ + ٤ت}$

شركة الراتب للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبدالرحمن شقير
00970568-952714

$$= \frac{١٥+٢٠ت}{٩+١٦} = \frac{١٥}{٢٥} + \frac{٢٠}{٢٥}ت = \frac{٣}{٥} + \frac{٤}{٥}ت$$

ثانيا: $(ع٣)^{-١} = \left(\frac{٩}{٥} - \frac{١٢}{٥}ت\right)^{-١} = \frac{١}{\frac{٩}{٥} - \frac{١٢}{٥}ت}$

$$= \frac{٥}{٩-١٢ت} \times \frac{٩+١٢ت}{٩+١٢ت} = \frac{٤٥+٦٠ت}{٨١+١٤٤}$$

$$= \frac{٤٥}{٢٢٥} + \frac{٦٠}{٢٢٥}ت = \frac{٣}{١٥} + \frac{٤}{١٥}ت = \frac{١}{٣}ع^{-١}$$

ثالثا: $|ع^{-١}| = \left|\left(\frac{٣}{٥}\right)^{٢} + \left(\frac{٤}{٥}\right)^{٢}\right|_{\mathbb{R}} = \left|\frac{١٦+٩}{٢٥}\right|_{\mathbb{R}} = \left|\frac{٢٥}{٢٥}\right|_{\mathbb{R}} = ١ = |١|_{\mathbb{R}}$

رابعا : $\left|\frac{\bar{ع}}{٥}\right| = \left|\left(\frac{٣}{٥} - \frac{٤}{٥}ت\right)\frac{١}{٥}\right| = \left|\frac{٣}{٢٥} + \frac{٤}{٢٥}ت\right| =$

$$= \left|\frac{١}{٢٥}\right|_{\mathbb{R}} = \left|\frac{٢٥}{٦٢٥}\right|_{\mathbb{R}} = \left|\frac{١٦}{٦٢٥} + \frac{٩}{٦٢٥}\right|_{\mathbb{R}} = \frac{١}{٥}$$

السؤال الرابع:

أ) $\frac{-١+\sqrt{٢}ت}{٢+ت} = \frac{-١+\sqrt{٢}ت}{٢+ت} \times \frac{٢-ت}{٢-ت}$

$$= \frac{-٢+ت+٢\sqrt{٢}ت-\sqrt{٢}ت^{٢}}{١+٤}$$

$$= \frac{-٢+\sqrt{٢}}{٥} + \frac{١+٢\sqrt{٢}}{٥}ت$$

ب) $\frac{٣+٤ت}{٣-٥ت} + \frac{٢+٣ت}{٢-٣ت} = \frac{٣+٤ت}{٣-٥ت} \times \frac{٣+٥ت}{٣+٥ت} + \frac{٢+٣ت}{٢-٣ت} \times \frac{٢+٣ت}{٢+٣ت}$

$$= \frac{٩+٢٧ت+٢٠ت^{٢}}{٩+٢٥} + \frac{٤+١٢ت+٩ت^{٢}}{٤+٩}$$

$$= \frac{-١١+٢٧ت}{٣٤} + \frac{-٥+١٢ت}{١٣}$$

$$= \frac{-١٤٣+١٧٠-٣٥١ت+٤٠٨}{٤٤٢}$$

$$= \frac{-٣١٣}{٤٤٢} + \frac{٧٥٩+}{٤٤٢}ت$$

السؤال الخامس: نفرض أن: $ع = ا+بت$

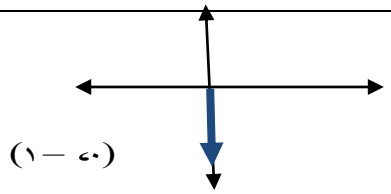
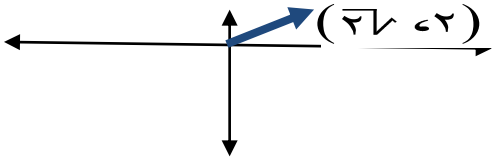
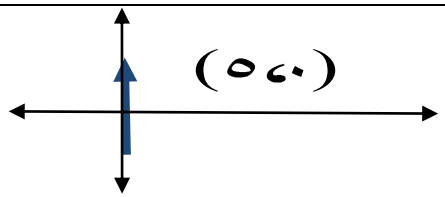
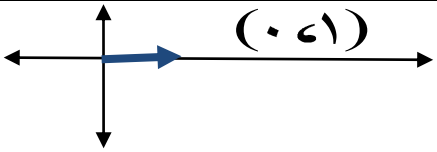
الطرف الأيمن= $ع-١ = ا+بت-١ \Leftarrow |ع-١| = \sqrt{(ا-١)^{٢}+ب^{٢}}$

الطرف الأيسر $= \overline{ع} - ١ = أ - ١ - ب ت \Leftarrow |ع - ١| = \sqrt{(أ-١)^{٢} + (-ب)^{٢}}$

$$\sqrt{أ^{٢} + (أ-١)^{٢}}$$

أي ان $|ع-١| = |\overline{ع}-١|$

السؤال السادس

العدد	تمثيله في مستوى الأعداد المركبة
$ت^{٣٥} = ت^{٣٢} \times ت^{٣} = ١ \times -ت = -ت$ $= ٠ - ت = (٠، -١)$	
$٢ + \sqrt{-٢} = ٢ + ت\sqrt{٢} = (٢، \sqrt{٢})$	
$\sqrt{-٤} + \sqrt{-٩} = \sqrt{-١} \times \sqrt{٤} + \sqrt{-١} \times \sqrt{٩}$ $= ٢ت + ٣ت = ٥ت = ٠ + ٥ت = (٠، ٥)$	
$\frac{١}{ت^{٥٢}} = ت^{-٥٢} = (ت^{٢})^{-٢٦} = ١$	

السؤال السابع:

$\because ع^{٢} = (\overline{ع})^{٢} \Leftarrow (أ + ب ت)^{٢} = (أ - ب ت)^{٢}$

$\Leftarrow أ^{٢} - ب^{٢} + ٢أب ت = أ^{٢} - ب^{٢} - ٢أب ت$

$\therefore ٢أب = -٢أب \Leftarrow ٤أب = ٠$

$\therefore أ = ٠ \quad \therefore ع = ب ت$ **(عدد تخيلي)**

أو $ب = ٠ \quad \therefore ع = أ$ **(عدد حقيقي)**

السؤال الثامن:

أ) $ع = -١ + ت$

$|ع| = \sqrt{(-١)^{٢} + (١)^{٢}} = \sqrt{٢}$

جتاهـ $= \frac{-١}{\sqrt{٢}}$ ، جاهـ $= \frac{١}{\sqrt{٢}}$،

شركة الراتب للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبدالرحمن شقير
00970568-952714

$\therefore$ هـ $= \frac{\pi ٣}{٤}$ ومنها ع $= \sqrt{٢}\left(\text{جتا}\frac{\pi ٣}{٤} + \text{ت جا}\frac{\pi ٣}{٤}\right)$

ب) ع $= ٠ + \frac{-١}{٢}$ ت

$|\text{ع}| = \sqrt{\left(\frac{-١}{٢}\right)^{٢} + (٠)^{٢}} = \sqrt{\frac{١}{٤}} = \frac{١}{٢}$

ظاهـ $= \frac{\frac{-١}{٢}}{٠} = ٠ \quad \therefore$ هـ $= \pi$

$\therefore$ ع $= \frac{١}{٢}\left(\text{جتا}\pi + \text{ت جا}\pi\right)$

ع $= -\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت ، $|\text{ع}| = ١$

ج) جتاهـ $= -\frac{١}{٢}$ ، جاهـ $= \frac{\sqrt{٣}}{٢} \Leftarrow$ هـ $= \frac{٢}{٣}\pi$

ع $= \left(\text{جتا}\frac{٢}{٣}\pi + \text{ت جا}\frac{٢}{٣}\pi\right)$

السؤال التاسع:

ا) ع $= ٧\left(\text{جتا}\frac{\pi ٣}{٤} + \text{ت جا}\frac{\pi ٣}{٤}\right) = ٧\left(\frac{-١}{\sqrt{٢}} + \frac{١}{\sqrt{٢}}\text{ت}\right)$

$= \frac{-٧}{\sqrt{٢}} + \frac{٧}{\sqrt{٢}}$ ت

ب) ع $= ٣\left(\text{جتا}\frac{-\pi}{٦} + \text{ت جا}\frac{-\pi}{٦}\right) = ٣\text{جتا}\frac{\pi}{٦} - ٣\text{ت جا}\frac{\pi}{٦}$

$= ٣ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} - ٣ \times \frac{١}{٢}$ ت $= \frac{٣\sqrt{٣}}{٢} - \frac{٣}{٢}$ ت

ج)

ع $= ٢\left(\text{جتا}\frac{\pi}{٤} - \text{ت جا}\frac{\pi}{٤}\right) = ٢\left(\frac{١}{\sqrt{٢}} - \frac{١}{\sqrt{٢}}\text{ت}\right)$

$= \frac{٢}{\sqrt{٢}} - \frac{٢}{\sqrt{٢}}$ ت $= \sqrt{٢} - \sqrt{٢}$ ت

د) ع $= ٣\left(\text{جتا}\frac{\pi}{٣} + \text{ت جا}\frac{\pi}{٣}\right) = ٣\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\text{ت} + \frac{١}{٢}\right)$

$= \frac{٣\sqrt{٣}}{٢}$ ت $+ \frac{٣}{٢}$

شركة الرائد للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبدالرحمن شقير
00970568-952714

تمارين عامة/ الأعداد المركبة صفحة ٢٢١

السؤال الأول:

رقم الفقرة	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧
الإجابة	ج	ج	د	أ	ب	ب	د

السؤال الثاني:

أ) $|ع_١| = |١ + ٢ت| = \sqrt{(١)^٢ + (٢)^٢} = \sqrt{٥}$

ب) $|ع_٢| = |-٢ + ت| = \sqrt{(-١)^٢ + (٢)^٢} = \sqrt{٥}$

ج) $|ع_١ + ع_٢| = |١ + ٣ت| = \sqrt{(١)^٢ + (٣)^٢} = \sqrt{١٠}$

د) $|ع_١| + |ع_٢| = \sqrt{٥} + \sqrt{٥} = ٢\sqrt{٥} = \sqrt{٢٠}$

نلاحظ أن: $|ع_١ + ع_٢| \neq |ع_١| + |ع_٢|$

السؤال الثالث:

$\because س^٢ + س + (ص - ١)ت = -ت س^٢$

$\therefore س^٢ + س + (ص + س^٢ - ١)ت = ٠$

ومنها $س^٢ + س = ٠$ ، $ص + س^٢ - ١ = ٠ \Leftarrow ص = ١ - س^٢$

$\Leftarrow س(س + ١) = ٠$

إذن إما $س = ٠ \Leftarrow ص = ١$

أو $س = -١ \Leftarrow ص = ٠$

الحلول هي $(١، ٠)$، $(-١، ٠)$

السؤال الرابع:

أ) $ل = \frac{٥(٣ - ت)}{٣ + ت}$، $م = \frac{١١ ات - ٣}{١ + ٢ت}$

$ل = \frac{٥(٣ - ت)}{٣ + ت} = \frac{٣ - ت}{٣ - ت} \times \frac{٥(٣ - ت)}{٣ + ت}$

$= \frac{٥(٩ - ٦ت - ١)}{١ + ٩} = \frac{٦ت - ٨}{٢} = ٣ت - ٤$

$م = \frac{١١ ات - ٢}{١ + ٢ت} = \frac{١ - ٢ت}{١ - ٢ت} \times \frac{١١ ات - ٢}{١ + ٢ت}$

$= \frac{١١ ات + ٢٢ - ٢ت٤}{١ + ٤} = \frac{٢٠ + ٥ ات}{٥} = ٤ + ٣ت = \bar{ل}$

إذن ل ، م مترافقان

ب) $ل + م = \frac{٥(٣ - ت)}{٣ + ت} + \frac{١١ ات - ٣}{١ + ٢ت} = ٤ - ٣ت + ٤ + ٣ت = ٨$

$ل م = \frac{٥(٣ - ت)}{٣ + ت} \times \frac{١١ ات - ٣}{١ + ٢ت} = (٤ - ٣ت)(٤ + ٣ت) = ١٦ + ٩ = ٢٥$

شركة الرائد للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبدالرحمن شقير
00970568-952714

$$\Leftarrow \quad ل^{٢} = م^{٢} + (ل + م)^{٢} - ٢ل م = ٨^{٢} - ٢ \times ٢٥ = ١٤$$

السؤال الخامس:

$$\frac{ت - \sqrt{٣}}{ت\sqrt{٣} + ١} = \frac{ت - \sqrt{٣}}{ت\sqrt{٣} + ١} \times \frac{ت\sqrt{٣} - ١}{ت\sqrt{٣} - ١} = \frac{\sqrt{٣} - ٤ت - \sqrt{٣}}{٣ + ١} = \frac{-٤ت}{٤} = -ت$$

$$\Leftarrow \quad \left(\frac{ت - \sqrt{٣}}{ت\sqrt{٣} + ١}\right)^{٧} = (-ت)^{٧} = -١ \times ت^{٤} \times ت^{٣} = -١ \times ١ \times -ت = ت$$

انتهت الاجابات