حلول كتاب الرياضيات

للصف

الثاني عشر الريادي

الوحدة الأولى

المصفوفات

حلول تمارين ومسائل ١-١

س١:

$$\begin{bmatrix} ٥٠ & ١٠٠ & ١٥٠ \\ ١٠٠ & ١٥٠ & ٢٠٠ \\ ١٥٠ & ١٠٠ & ٢٥٠ \\ ١٥٠ & ٢٠٠ & ٥٠ \end{bmatrix}$$ أو $$\begin{bmatrix} ٥٠ & ٢٥٠ & ٢٠٠ & ١٥٠ \\ ٢٠٠ & ١٠٠ & ١٥٠ & ١٠٠ \\ ١٥٠ & ١٥٠ & ١٠٠ & ٥٠ \end{bmatrix}$$

س٢:

١) رتبة أ تساوي ٢×٣ ، رتبة ب تساوي ٢×٢ ، رتبة جـ تساوي ٣×٢

٢) أ$_{٢٢}$= $\frac{٢}{٣}$، ب$_{١٢}$= ٣ ، جـ$_{١٣}$= ٢,٣، جـ$_{٢٣}$ = -٥

٣) أ$_{٢١}$ + جـ$_{٢٣}$= ٢+ (-٥)=-٣

س٣:

١) من تساوي المصفوفتين ٣ص=٩ ، ص= ٣

١- س= -٢ ، س = ٣

٢) من تساوي المصفوفتين س+٤ = ٢ فإن س =٢-٤=-٢

ص= ٣×-٢=-٦

س٤:

الحل: جـ = $\begin{bmatrix} جـ_{١١} & جـ_{٢١} \\ جـ_{١٢} & جـ_{٢٢} \\ جـ_{١٣} & جـ_{٢٣} \end{bmatrix}$ ،

جـ$_{١١}$ = ٢(١) − ١ = ١	جـ$_{٢١}$ = ٢(١) − ٢ = ٠
جـ$_{١٢}$ = ٢(٢) − ١ = ٣	جـ$_{٢٢}$ = ٢(٢) − ٢ = ٢
جـ$_{١٣}$ = ٢(٣) − ١ = ٥	جـ$_{٢٣}$ = ٢(٣) − ٢ = ٤

إذاً جـ = $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ٢ & ٣ \\ ٤ & ٥ \end{bmatrix}$

شركة الرائد للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبدالرحمن شقير
00970568-952714

حلول تمارين ومسائل ١-٢

س١:

أ) $أ = [٢٠٠٠ \quad ٢٥٠٠ \quad ٤٠٠٠]$، $ب = [٥٠٠٠ \quad ٥٥٠٠ \quad ٦٥٠٠]$، $جـ = [٣٥٠٠ \quad ٤٥٠٠ \quad ٥٠٠٠]$

ويمكن كتابتها على شكل مصفوفة صف.

ب) $س = [١٠٥٠٠ \quad ١٢٥٠٠ \quad ١٥٥٠٠]$

جـ) $[٣٠٠٠ \quad ٣٠٠٠ \quad ٢٥٠٠]$

س٢:

١. $$\begin{bmatrix} ١- & ٢- \\ ٢- & ٣ \\ ١- & ٥- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ١- & ٢- \\ ٢- & ٣ \\ ١- & ٥- \end{bmatrix}$$

٢. $$\begin{bmatrix} ٢ & ٣ & ٤ \\ ٥ & ٣- & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ١ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٣ & ٤ & ٥ \\ ٦ & ٢- & ١ \end{bmatrix}$$

س٣:

١) $$(أ + ب) - ٢ جـ = (\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ٣ & ٢- \\ ٤ & ١- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٥ & ٣ \\ ٣- & ١ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix}) - ٢ \begin{bmatrix} ٤ & ٢- \\ ٥ & ٠ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٥ & ٤ \\ ٠ & ١- \\ ٦ & ١- \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٨ & ٤- \\ ١٠ & ٠ \\ ٦ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣- & ٨ \\ ١٠- & ١- \\ ٠ & ٥- \end{bmatrix}$$

٢) $$(أ + ب) + جـ = (\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ٣ & ٢- \\ ٤ & ١- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٥ & ٣ \\ ٣- & ١ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix}) + \begin{bmatrix} ٤ & ٢- \\ ٥ & ٠ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٥ & ٤ \\ ٠ & ١- \\ ٦ & ١- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٤ & ٢- \\ ٥ & ٠ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٩ & ٢ \\ ٥ & ١- \\ ٩ & ١ \end{bmatrix}$$

شركة الراتب للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبدالرحمن شقير
00970568-952714

٣) أ + (ب + جـ) = $\begin{bmatrix} ٤ & ٢- \\ ٥ & ٠ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} ٥ & ٣ \\ ٣- & ١ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ٣ & ٢- \\ ٤ & ١- \end{bmatrix} \right)$

$= \begin{bmatrix} ٩ & ٢ \\ ٥ & ١- \\ ٩ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٩ & ١ \\ ٢ & ١ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ٣ & ٢- \\ ٤ & ١- \end{bmatrix} =$

٤) ٢(أ + جـ) = ٢ $\left(\begin{bmatrix} ٤ & ٢- \\ ٥ & ٠ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ٣ & ٢- \\ ٤ & ١- \end{bmatrix} \right)$ ٢ = $\begin{bmatrix} ٤ & ١- \\ ٨ & ٢- \\ ٧ & ١ \end{bmatrix}$ ٢ = $\begin{bmatrix} ٨ & ٢- \\ ١٦ & ٤- \\ ١٤ & ٢ \end{bmatrix}$

٥) (ب + جـ) = $\begin{bmatrix} ٩ & ١ \\ ٢ & ١ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix}$ ٦) (جـ + ب) = $\begin{bmatrix} ٩ & ١ \\ ٢ & ١ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix}$

س٤:

١. المصفوفتان متساويتان س + ص=٤

س - ٣ص=٠ بحل المعادلتين بالحذف ينتج أن

س= ٣ ، ص= ١

٢. $\begin{bmatrix} ١١ \\ ١٣ \\ ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ \\ ٢ص \\ ١- \end{bmatrix} ٣ + \begin{bmatrix} س \\ ١ \\ ٤ \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} ١١ \\ ١٣ \\ ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٥ \\ ٦ص \\ ٣- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} س \\ ١ \\ ٤ \end{bmatrix}$ ومنها س+١٥=١١ ، س=-٤

وأيضاً ١+٦ص=١٣ ، ص=٢

س٥:

١) - ٢ سـ = ٣ $\begin{bmatrix} ٣- & ١- \\ ٣ & ١٠- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٥- & ٠ \\ ٩ & ٤ \end{bmatrix}$

شركة الراتب للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبدالرحمن شقير
00970568-952714

$$\begin{bmatrix} ١٨- & ١- \\ ٣٠ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣- & ١- \\ ٣ & ١٠- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ١٥- & ٠ \\ ٢٧ & ١٢ \end{bmatrix} =$$

$$\text{سـ} = \frac{١-}{٢}\begin{bmatrix} ١٨- & ١- \\ ٣٠ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٩ & \frac{١}{٢} \\ ١٥- & ١- \end{bmatrix}$$

٢) $\begin{bmatrix} ٢ & ١ & ٣- \\ ٦- & ٥ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢- & ٠ & ٢- \\ ٣ & ١ & ٠ \end{bmatrix} + \frac{١}{٢}$ صـ

$$\frac{١}{٢}\text{ صـ} = \begin{bmatrix} ٢- & ٠ & ٢- \\ ٣ & ١ & ٠ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٢ & ١ & ٣- \\ ٦- & ٥ & ٠ \end{bmatrix}$$

$$\frac{١}{٢}\text{ صـ} = \begin{bmatrix} ٤ & ١ & ١- \\ ٩- & ٤ & ٠ \end{bmatrix}$$

$$\text{صـ} = \begin{bmatrix} ٨ & ٢ & ٢- \\ ١٨- & ٨ & ٠ \end{bmatrix}$$

شركة الراتب للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبدالرحمن شقير
00970568-952714

حلول تمارين ومسائل ١ – ٣

س١: أكمل الجدول الآتي :

رتبة المصفوفة أ	رتبة المصفوفة ب	أ . ب معرفة	أ . ب غير معرفة	رتبة مصفوفة الناتج
٣×١	٢×٣	✓	_____	٢×١
٣×٢	٣×٢	_____	✓	_____
١×٢	٣×١	✓	_____	٣×٢

س٢: أجد ناتج ما يأتي (إن أمكن):

١) $\begin{bmatrix} ٣ & ١ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ٨ \\ ٩ \end{bmatrix} = [٩\times١ + ٨\times٣] = [٣٣]$

٢) $\begin{bmatrix} ٢ \\ ٥- \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \end{bmatrix}$ لا يمكن لأن الضرب غير معرف.

٣) $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ٠ & ١^- \\ ١^- & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠\times١+١^-\times٠ & ١^-\times٠+٠\times١ \\ ٠\times١^-+١^-\times٠ & ١^-\times١^-+٠\times٠ \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} ٠ & ١- \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$$

٤) $\begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٥^- \\ ٢ & ١^- & ٦ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ٢ & ٤ & ٢^- \\ ٠ & ١٠ & ٤ \\ ٠ & ١ & ٧^- \end{bmatrix} =$

$$\begin{bmatrix} ١\times٢+٠\times٠+٥^-\times٠ & ١\times٤+٠\times١٠+٥^-\times١ & ١\times٢^-+٠\times٤+٥^-\times٧^- \\ ٢\times٢+١^-\times٠+٦\times٠ & ٢\times٤+١^-\times١٠+٦\times١ & ٢\times٢^-+١^-\times٤+٦\times٧^- \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٢ & ١^- & ٣٣ \\ ٤ & ٤ & ٥٠^- \end{bmatrix}$$

س٣:

١) **ب. جـ** $= \begin{bmatrix} ٧ & ٨ & ١٥ \\ ٣ & ٥ & ٦^- \\ ٠ & ٦ & ٠ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ٣ & ٥ & ٩ \\ ١^- & ٢^- & ٤ \\ ٠ & ٦ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٣ & ١٠٩ & ٩٥ \\ ٤ & ٣١^- & ٤٧ \end{bmatrix}$

٢) ٢ **أ . (- ب)** $= ٢ \begin{bmatrix} ٧^- & ٨^- & ١٥^- \\ ٣^- & ٥^- & ٦ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ٢ & ١- \\ ٣ & ١ \\ ٠ & ٥ \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} ٤ & ٤- & ٢- \\ ٦ & ٢ & ١٠ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ٣^- & ٨^- & ١٥^- \\ ٥^- & ٢^- & ٦ \\ ٣^- & ٥^- & ٧٢^- \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} ٤٨^- & ٥٨^- & ٧٨- \\ ٣٠^- & ٥٠^- & ٦٠ \end{bmatrix}$$

٣) **جـ** $^٢ = \begin{bmatrix} ٣ & ٥ & ٩ \\ ١^- & ٢^- & ٤ \\ ٠ & ٦ & ٠ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ٣ & ٥ & ٩ \\ ١^- & ٢^- & ٤ \\ ٠ & ٦ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ٥٩ & ٤٧ \\ ١^- & ٢٣ & ١٧^- \\ ٦^- & ١٢^- & ٢٤ \end{bmatrix}$

٤) **لا يمكن.**

شركة الراتب للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبدالرحمن فطير
00970568-952714

س٤: $\begin{bmatrix} ٣س-٢ & -٢س-٢ص \\ ٣ & -٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & -١٤ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$

٣س – ٢ =٤ ومنها س= ٢

-٢س -٢ص = -١٤ ومنها ص=٥

س٥:

١) (أ. ب) . جـ =($\begin{bmatrix} ٢ & ١ & ٧ \\ ١ & -٥ & ٣ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ٠ & ٣ \\ ٧ & ١ \end{bmatrix}$). $\begin{bmatrix} -٣ & ٥ & ٢ \\ ٢ & -٢ & -١ \\ ٤ & ١ & ٠ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} ٦ & ٣ & ٢١ \\ ٩ & -٣٤ & ٢٨ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -٣ & ٥ & ٢ \\ ٢ & -٢ & -١ \\ ٤ & ١ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٣٣ & ١٠٥ & ٣٩ \\ -١١٦ & ٢١٧ & ٩٠ \end{bmatrix}$

٢) أ. (ب . جـ)= ($\begin{bmatrix} ٢ & ١ & ٧ \\ ١ & -٥ & ٣ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ٠ & ٣ \\ ٧ & ١ \end{bmatrix}$). $\begin{bmatrix} -٣ & ٥ & ٢ \\ ٢ & -٢ & -١ \\ ٤ & ١ & ٠ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -١١ & ٣٥ & ١٣ \\ -١٥ & ٢٦ & ١١ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ٠ & ٣ \\ ٧ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٣٣ & ١٠٥ & ٣٩ \\ -١١٦ & ٢١٧ & ٩٠ \end{bmatrix}$

٣) ٢ (أ. ب) =٢ ($\begin{bmatrix} ٢ & ١ & ٧ \\ ١ & -٥ & ٣ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ٠ & ٣ \\ ٧ & ١ \end{bmatrix}$)

$= ٢ \begin{bmatrix} ٦ & ٣ & ٢١ \\ ٩ & -٣٤ & ٢٨ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٢ & ٦ & ٤٢ \\ ١٨ & -٦٨ & ٥٦ \end{bmatrix}$

٤) (أ٢). ب =($\begin{bmatrix} ٢ & ١ & ٧ \\ ١ & -٥ & ٣ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ٠ & ٣ \\ ٧ & ١ \end{bmatrix}$)٢

$= \begin{bmatrix} ٢ & ١ & ٧ \\ ١ & -٥ & ٣ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ٠ & ٦ \\ ١٤ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٢ & ٦ & ٤٢ \\ ١٨ & -٦٨ & ٥٦ \end{bmatrix}$

٥) أ. (٢ب) $= \begin{bmatrix} ٤٢ & ٦ & ١٢ \\ ٥٦ & -٦٨ & ١٨ \end{bmatrix}$

حلول تمارين ومسائل ١ – ٤

س١: ١) $\begin{vmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & ٤ \end{vmatrix} = (١\times٤)-(٣\times٢) = ٢$

٢) $\begin{vmatrix} ٤ & ١٢ \\ ١ & ٣ \end{vmatrix} = (٤\times٣)-(١٢\times١) = ٠$

٣) $\begin{vmatrix} ١ & ٢ & -٣ \\ -١ & ٢ & -٣ \\ -٢ & ٣ & ٤ \end{vmatrix} = ٣- \begin{vmatrix} -١ & ٢ \\ -٢ & ٣ \end{vmatrix} + ٢- \begin{vmatrix} -١ & -٣ \\ -٢ & ٤ \end{vmatrix} + ١ \begin{vmatrix} ٢ & -٣ \\ ٣ & ٤ \end{vmatrix}$

$= -٣(-٤+٣)-٢(٤+٦)+(-٩-٨) = -٣٤$

س٢:

$|أ\cdot ب| = \left| \begin{bmatrix} ٤ & ١ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -١ & ٢ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} ٦ & ٢ \\ ١٤ & ٢ \end{vmatrix} = (٢\times١٤)-(٦\times٢) = ١٦$

$|أ+ب| = \left| \begin{bmatrix} ٤ & ١ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -١ & ٢ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} ٣ & ٣ \\ ٥ & ٢ \end{vmatrix} = (٣\times٥)-(٣\times٢) = ٩$

$|أ-٢ب| = \left| \begin{bmatrix} ٤ & ١ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix} ٢ - \begin{bmatrix} -١ & ٢ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} ٨ & ٢ \\ ٤ & ٠ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -١ & ٢ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix} \right|$

$= \begin{vmatrix} -٩ & ٠ \\ -١ & ٢ \end{vmatrix} = (٢\times-٩)-(٠\times-١) = ١٨$

س٣: ٢س – ٣ = ٥ ومنها س = ٤

س٤:

شركة الرائد للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبدالرحمن شقير
00970568-952714

$$\begin{vmatrix} س & -٢ & ١ \\ ٠ & ١ & -١ \\ ٥ & ٦ & ٠ \end{vmatrix} = س(٠+٦)+٢(٠+٥)+(٠-٥)=٦س+٥$$

٦س + ٥ =١١ ومنها س = ١

حلول تمارين ومسائل ١ – ٥

س١: أجد النظير الضربي للمصفوفات الآتية (إن أمكن) :

١) محدد المصفوفة $\begin{vmatrix} ١ & -١ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix}$ = -٣ يوجد لها نظير ضربي

النظير الضربي للمصفوفة = $\frac{-١}{٣}\begin{vmatrix} ٢ & -١ \\ -١ & -١ \end{vmatrix}$

$$\begin{bmatrix} \frac{١}{٣} & \frac{-٢}{٣} \\ \frac{١}{٣} & \frac{١}{٣} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-١}{٣} & \frac{٢}{٣} \\ \frac{-١}{٣} & \frac{-١}{٣} \end{bmatrix} =$$

٢) $\begin{bmatrix} ١ & \frac{١}{٢} \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$ لا يوجد للمصفوفة نظير ضربي لان المحدد صفر (منفردة)

٣) $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ نظير المصفوفة المحايدة هي نفسها

س٢:

١) ٣س -٦ =٠ ومنها س=٢

٢) س^{٢} =٣٦ ومنها س= ٦ أو س= -٦

س٣: ب = ٤ $\begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٦ & ١٢ \\ ٨ & ٤ \end{bmatrix}$

$$|ب| = \begin{vmatrix} ١٦ & ١٢ \\ ٨ & ٤ \end{vmatrix} = ٩٦ - ٦٤ = ٣٢$$

شركة الرائد للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبدالرحمن شقير
00970568-952714

$$\text{ب}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{8}{32} & \frac{16-}{32} \\ \frac{4-}{32} & \frac{12}{32} \end{bmatrix}$$

س٤: $\text{أ} \cdot \text{ب} = \begin{bmatrix} 1- & 1- \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1- & 4 \\ 1 & 2- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3- & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$(\text{أ} \cdot \text{ب})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{ب}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1- & 2- \end{bmatrix} \quad ، \quad \text{أ}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{ب}^{-1} \cdot \text{أ}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1- & 2- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن $(\text{أ} \cdot \text{ب})^{-1} = \text{ب}^{-1} \cdot \text{أ}^{-1}$

س٥: $\text{س}_2 \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5- \\ 8- & 4 \end{bmatrix}$

$$\text{س}_2 \cdot \left(\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2- & 4- \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 3 & 5- \\ 8- & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2- & 4- \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{س}_2 = \begin{bmatrix} 3 & 5- \\ 8- & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2- & 4- \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 27- \\ 32- & 44 \end{bmatrix}$$

$$\text{س} = \begin{bmatrix} \frac{19}{2} & \frac{27-}{2} \\ \frac{32-}{2} & \frac{44}{2} \end{bmatrix}$$

حلول تمارين (١- ٦)

س١: أحل الأنظمة الخطية الآتية باستخدام النظير الضربي:

شركة الرائد للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبدالرحمن شقير
00970568-952714

١) نكتب النظام بصورة معادلة مصفوفية

$$\begin{bmatrix} ٤ \\ ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ٤^- & ٣ \\ ٤ & ٢^- \end{bmatrix}$$ نضرب النظير الضربي للمصفوفة $\begin{bmatrix} ٤^- & ٣ \\ ٤ & ٢^- \end{bmatrix}$ في طرفي المعادلة المصفوفية من جهة اليمين

$$\begin{bmatrix} ٤ \\ ٤ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{٤}{٤} & \frac{٤}{٤} \\ \frac{٣}{٤} & \frac{٢}{٤} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} ٤^- & ٣ \\ ٤ & ٢^- \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{٤}{٤} & \frac{٤}{٤} \\ \frac{٣}{٤} & \frac{٢}{٤} \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{bmatrix} ٨ \\ ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix}$$ ومنها س=٨ ، ص= ٥

٢) نرتب النظام كالآتي : س – ص = ٣

٢ س + ص = ٦

$$\begin{bmatrix} ٣ \\ ٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ١^- & ١ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ٣ \\ ٦ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{١}{٣} & \frac{١}{٣} \\ \frac{١}{٣} & \frac{٢^-}{٣} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} ١^- & ١ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{١}{٣} & \frac{١}{٣} \\ \frac{١}{٣} & \frac{٢^-}{٣} \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{bmatrix} ٣ \\ ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix}$$ ومنها س= ٣ ، ص= ٠

س٢: أحل الأنظمة الخطية الآتية باستخدام طريقة كريمر:

١) $أ = \begin{bmatrix} ١^- & ١ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$ ، $أ_س = \begin{bmatrix} ١^- & ٨ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$ ، $أ_ص = \begin{bmatrix} ٨ & ١ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$

$|أ| = ٣$ ، $|أ_س| = ٩$ ، $|أ_ص| = -١٥$

وحسب طريقة كريمر س= $\frac{|أ_س|}{|أ|} = \frac{٩}{٣} = ٣$ ، ص= $\frac{|أ_ص|}{|أ|} = \frac{١٥^-}{٣} = -٥$

٢) نرتب النظام كالآتي : - س + ٢ص =١

٢س + ص = ٨

$$\text{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} \quad ، \quad \text{أ}_{س} = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ١ & ٨ \end{bmatrix} \quad ، \quad \text{أ}_{ص} = \begin{bmatrix} ١ & -١ \\ ٨ & ٢ \end{bmatrix}$$

$$|\text{أ}| = -٥ \quad ، \quad |\text{أ}_{س}| = -١٥ \quad ، \quad |\text{أ}_{ص}| = -١٠$$

وحسب طريقة كريمر $س = \frac{|\text{أ}_{س}|}{|\text{أ}|} = \frac{-١٥}{-٥} = ٣$ ، $ص = \frac{|\text{أ}_{ص}|}{|\text{أ}|} = \frac{-١٠}{-٥} = ٢$

س٣: حسب طريقة كريمر $س = \frac{|\text{أ}_{س}|}{|\text{أ}|} = \frac{٣٣}{١١} = ٣$ ، $ص = \frac{|\text{أ}_{ص}|}{|\text{أ}|} = \frac{١١}{١١} = ١$

س٤:

أ. المعادلتين الخطيتين هما:

$س + ٢ص + ٢ = ٠$

$٣س + ١١ص - ٩ = ٠$

ب . استخدم طريقة كريمر لحل النظام .

$$\text{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ١١ & ٣ \end{bmatrix} \quad ، \quad \text{أ}_{س} = \begin{bmatrix} -٢ & ١ \\ ٩ & ٣ \end{bmatrix} \quad ، \quad \text{أ}_{ص} = \begin{bmatrix} ٢ & -٢ \\ ١١ & ٩ \end{bmatrix}$$

$$|\text{أ}| = ٥ \quad ، \quad |\text{أ}_{س}| = -٤٠ \quad ، \quad |\text{أ}_{ص}| = ١٥$$

وحسب طريقة كريمر $س = \frac{|\text{أ}_{س}|}{|\text{أ}|} = \frac{-٤٠}{٥} = -٨$ ، $ص = \frac{|\text{أ}_{ص}|}{|\text{أ}|} = \frac{١٥}{٥} = ٣$

حلول تمارين عامة ١ – ٧

س١:

الفقرة	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
الإجابة	د	أ	ج	أ	ج	ب	أ	ج	د	ب

س٢: أ) $جـ + ل = \begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٥ & -٤ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٨ & -٦ \\ ٤ & ٧ \end{bmatrix}$

ب) $٣جـ - ٢ل = ٣\begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix} - ٢\begin{bmatrix} ٥ & -٤ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١ & ٢ \\ ٢ & ٦ \end{bmatrix}$

شركة الرائد للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبدالرحمن شلبور
00970568-952714

ج) أ.ب . د= (أ . ب) . د = $\begin{bmatrix} ٢ & ٦ & ٢- \\ ٤- & ١ & ٥ \\ ٢ & ١ & ٣ \end{bmatrix}$.($\begin{bmatrix} ٢ & ٣- & ٥ \\ ٦ & ٥- & ٤ \end{bmatrix}$. $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & ١ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$)

$\begin{bmatrix} ٢٦ & ١٤ & ٤- \\ ٩٢ & ٦٣ & ٣٣- \\ ١٧٢ & ١٣٣ & ٨٣- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ٦ & ٢- \\ ٤- & ١ & ٥ \\ ٢ & ١ & ٣ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ٢ & ٣- & ٥ \\ ١٠ & ١١- & ١٤ \\ ٢٢ & ٢١- & ٢٢ \end{bmatrix} =$

د) $ل^{-١} = \begin{bmatrix} \frac{٣}{٢٣} & \frac{٤}{٢٣} \\ \frac{٢-}{٢٣} & \frac{٥}{٢٣} \end{bmatrix}$ ه) $|ج| = ١٦$

س٣:

أ) $٢ س = \begin{bmatrix} ٤ & ٧ \\ ٦ & ٨ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & ٢- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦ & ٤ \\ ٢ & ٦ \end{bmatrix}$

$س = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$

ب)

$\begin{bmatrix} ٤ & ٢- \\ ١ & ٥ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٠ & ٣ \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix} = ص . \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$

$ص . \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٢- \\ ٥ & ٢- \end{bmatrix}$

$ص = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ \frac{١}{٤} & \frac{٢-}{٤} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ١ & ٢- \\ ٥ & ٢- \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ \frac{١}{٤} & \frac{٢-}{٤} \end{bmatrix}$

$ص = \begin{bmatrix} \frac{١-}{٢} & ٢ \\ \frac{١-}{٢} & ٦ \end{bmatrix}$

ج) $س = \begin{bmatrix} ٨ \\ ٨ \end{bmatrix}$

شركة الراتب للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبدالرحمن شقير
00970568-952714

س٤: أكتب أنظمة المعادلات الآتية على شكل معادلات مصفوفية:

أ) $\begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ \\ ٧ \end{bmatrix}$

ب) $\begin{bmatrix} ١ & -٣ & ٣ \\ ٤ & ١ & -١ \\ ٥ & ١ & -١ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} س \\ ص \\ ع \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ \\ ٢ \\ ٠ \end{bmatrix}$

س٥: -٤س + ٢ص = ٢

٥س + ص = ٨

$أ = \begin{bmatrix} ٢ & -٤ \\ ١ & ٥ \end{bmatrix}$ ، $أ_س = \begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ ٨ & ١ \end{bmatrix}$ ، $أ_ص = \begin{bmatrix} ٢ & -٤ \\ ٨ & ٥ \end{bmatrix}$

$|أ| = ١٤-$ ، $|أ_س| = ١٤-$ ، $|أ_ص| = ٤٢-$

وحسب طريقة كريمر $س = \frac{|أ_س|}{|أ|} = \frac{-١٤}{-١٤} = ١$ ، $ص = \frac{|أ_ص|}{|أ|} = \frac{-٤٢}{-١٤} = ٣$

س٦: ١(٢ – س) -٢ (٤ – ٣س) + ٣ (٢-٣) =٦

٢ – س -٨ + ٦س -٣ =٦ ومنها ٥ س – ٩ = ٦ ومنها س= ٣

س٧: $ص = \frac{|أ_ص|}{|أ|}$ وبالتعويض $٢ = \frac{-١٤}{|أ|}$ ومنها $|أ| = ٧-$

$س = \frac{|أ_س|}{|أ|} = \frac{-٢١}{-٧} = ٣$

الوحدة الثانية

التفاضل

حلول تمارين ومسائل ٢-١

س١:

أ . $\Delta س = س_٢ - س_١ = ٣,٨ - ٢ = ١,٨$

$\Delta ص = ص_٢ - ص_١ = هـ(س_٢) - هـ(س_١)$

$= هـ(٣,٨) - هـ(٢) = ١٨ - ٩ = ٩$

ب. $\Delta س = س_٢ - س_١ = -٢ - ٤ = -٦$

$\Delta ص = ص_٢ - ص_١ = هـ(س_٢) - هـ(س_١)$

$= هـ(-٢) - هـ(٤) = -١١ - ١٩ = -٣٠$

س٢:

أ. متوسط التغير $= \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{هـ(س_٢) - هـ(س_١)}{س_٢ - س_١}$

$= \frac{هـ(٤) - هـ(٧)}{٤ - ٧} = \frac{٢ - ١}{-٣} = \frac{١}{٣}$

ب . متوسط التغير $= \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{هـ(س_٢) - هـ(س_١)}{س_٢ - س_١}$ ، $س_١ = ٢$ ، $س_٢ = ٢ + ٤ = ٦$

$= \frac{هـ(٦) - هـ(٢)}{٦ - ٢} = \frac{٣٥ - ٣}{٤} = ٨$

س٣:

أ. التغير في ص $= \Delta ص = ص_٢ - ص_١ = هـ(س_٢) - هـ(س_١)$

$\frac{\Delta ص}{س_٢ - س_١} = \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{\Delta ص}{٤ - ١} = \frac{\Delta ص}{٣} = ١٣$

ومنها $\Delta ص = ٣٩$

ب. $\Delta ص = هـ(٤) - هـ(١)$

$هـ(٤) = \Delta ص + هـ(١) = ٣٩ + ٦ = ٤٥$

س٤:

ميل القاطع أب $= \frac{هـ(س_٢) - هـ(س_١)}{س_٢ - س_١}$

$= \frac{هـ(٣) - هـ(-٢)}{٣ - -٢} = \frac{١٠ - ٥}{٣ - -٢} = \frac{٥}{٥} = ١$

حلول تمارين ومسائل ٢-٢

س١:

أ. $ن'(-٣) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{ن(-٣ + هـ) - ن(-٣)}{هـ}$

$$= \lim_{هـ \to 0} \frac{٢(-٣ + هـ) - ٧ - (٢(-٣) - ٧)}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to 0} \frac{-٦ + ٢هـ - ٧ + ١٣}{هـ} = \lim_{هـ \to 0} \frac{٢هـ}{هـ}$$

$$= ٢$$

ب. $ن'(٢) = \lim_{هـ \to 0} \frac{ن(٢ + هـ) - ن(٢)}{هـ}$

$$= \lim_{هـ \to 0} \frac{٣ - (٢ + هـ) - (٣ - ٢)}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to 0} \frac{١ - هـ - ١}{هـ} = \lim_{هـ \to 0} \frac{-هـ}{هـ}$$

$$= -١$$

ج. $و'(-\frac{١}{٢}) = \lim_{هـ \to 0} \frac{و(-\frac{١}{٢} + هـ) - و(-\frac{١}{٢})}{هـ}$

$$= \lim_{هـ \to 0} \frac{((-\frac{١}{٢} + هـ)^{٢} + (-\frac{١}{٢} + هـ)) - (\frac{١}{٤} - \frac{١}{٢})}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to 0} \frac{\frac{١}{٤} - هـ + هـ^{٢} - \frac{١}{٢} + هـ - \frac{١}{٤} + \frac{١}{٢}}{هـ} = \lim_{هـ \to 0} \frac{هـ^{٢}}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to 0} هـ$$

$$= ٠$$

س٢: أ. $\lim_{هـ \to 0} \frac{ن(٣ + هـ) - ن(٣)}{هـ} = و'(٣) = ٨$

ب. $\lim_{هـ \to 0} \frac{ن(٣ + هـ) - ن(٣)}{٢هـ} = \frac{١}{٢} \lim_{هـ \to 0} \frac{ن(٣ + هـ) - ن(٣)}{هـ}$

$$= \frac{١}{٢} و'(٣) = \frac{١}{٢} \times ٨$$

$$= ٤$$

ج. $= -١ \times \lim_{هـ \to 0} \frac{ن(٣ + هـ) - ن(٣)}{هـ} \lim_{هـ \to 0} \frac{ن(٣) - ن(٣ + هـ)}{هـ}$

شركة الراتب للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبدالرحمن شقير
00970568-952714

$$= -\text{ف}'(٣)$$

$$= -٨$$

س٣: $\text{ف}'(٣) = \lim_{\text{هـ}\to ٠} \frac{\text{ق}(٣+\text{هـ}) - \text{ق}(٣)}{\text{هـ}}$

$= \lim_{\text{هـ}\to ٠}$ متوسط التغير $= \lim_{\text{هـ}\to ٠} \frac{٢}{(-١+\text{هـ})}$

$$= -٢$$

س٤: $\text{ف}'(٥) = \lim_{\Delta\text{س}\to ٠} \frac{\Delta\text{ص}}{\Delta\text{س}} = \lim_{\text{هـ}\to ٠} \frac{\frac{٧\text{هـ} - \text{هـ}^{٢}}{٤}}{\text{هـ}}$

$$= \lim_{\text{هـ}\to ٠} \frac{٧\text{هـ} - \text{هـ}^{٢}}{٤\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ}\to ٠} \frac{\text{هـ}(٧ - \text{هـ})}{٤\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ}\to ٠} \frac{٧ - \text{هـ}}{٤}$$

$$= \frac{٧}{٤}$$

س٥: $\text{ف}'(\text{س}) = \lim_{\text{هـ}\to ٠} \frac{\text{ق}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}}$

$$= \lim_{\text{هـ}\to ٠} \frac{((\text{س}+\text{هـ})^{٢}+١) - (\text{س}^{٢}+١)}{\text{هـ}}$$

$$= \lim_{\text{هـ}\to ٠} \frac{\text{س}^{٢} + ٢\text{س}\text{هـ} + \text{هـ}^{٢} + ١ - \text{س}^{٢} - ١}{\text{هـ}}$$

$$= \lim_{\text{هـ}\to ٠} \frac{٢\text{س}\text{هـ} + \text{هـ}^{٢}}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ}\to ٠} \frac{\text{هـ}(٢\text{س} + \text{هـ})}{\text{هـ}}$$

$$= \lim_{\text{هـ}\to ٠} ٢\text{س} + \text{هـ}$$

$$= ٢\text{س}$$

حلول تمارين ومسائل ٢-٣

س١: أجد $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ الاقترانات الآتية:

أ. $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} =$ صفر ب) $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = ٥$

ج. ص $= ٣\text{س}^{-٢} + ٥\text{س}$ ، $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = -٦\text{س}^{-٣} + ٥ = \frac{-٦}{\text{س}^{٣}} + ٥$ ، س $\neq ٠$

د. $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = ١٤\text{ س} + \frac{٢}{٣}\text{س}^{\frac{-١}{٣}} = ١٤\text{ س} + \frac{٢}{٣\sqrt[٣]{\text{س}}}$

هـ. $\frac{ص}{س}$ = الأول × مشتقة الثاني + الثاني × مشتقة الأول

$= (٢س+٥) \times (-٣س^{٢}) + (٣ - س^{٣}) \times ٢$

$= -٦س^{٣} - ١٥س^{٢} + ٦ - ٢ س^{٣}$

$= -٨ س^{٣} - ١٥س^{٢} + ٦$

و. $\frac{ص}{س} = \frac{(س+٣)\times ١ - س \times ١}{(س+٣)^{٢}}$

$= \frac{س+٣-س}{(س+٣)^{٢}} = \frac{٣}{(س+٣)^{٢}}$

$\frac{ص}{س}\Big|_{س=١} = \frac{٣}{١٦}$

س٢: $هـ'(س) = ٢س - ١$

$هـ'(٣) = ٢ \times ٣ - ١ = ٥$

س٣: $ل'(س) = هـ'(س) + ٣هـ'(س)$

$= (٢س+٣) + هـ'(س)$

$ل'(٢) = (٢ \times ٢ + ٣) + ٣هـ'(٢)$

$= ٧ + ١ \times ٣$

$= ١٠$

س٤: $هـ'(س) = \frac{(٤س+١)\times ٣ - (٣س+٢)\times ٤}{(٤س+١)^{٢}}$

$هـ'(٢) = \frac{٩ \times ٣ - ٨ \times ٤}{(٩)^{٢}} = \frac{٢٧-٣٢}{(٩)^{٢}} = \frac{-٥}{٨١}$

س٥: $هـ'(س) = (س^{٣} \times ل'(س) + ل(س) \times ٣س^{٢}) + هـ'(س)$

$هـ'(٢) = (٨ \times ل'(٢) + ل(٢) \times ١٢) + هـ'(٢)$

$= (٨ \times ٣^{-} + ٥ \times ١٢) + ٧ = (-٢٤ + ٦٠) + ٧$

$= ٤٣$

س٦:

أ. $هـ'(س) = ٤س^{٣} - ٦س^{٢}$

$هـ''(س) = ١٢ س^{٢} - ١٢ س$

$هـ''(٢) = ١٢ \times ٤ - ١٢ \times ٢$

$= ٢٤$

ب. $هـ(س) = س^{\frac{-١}{٢}}$

$$هـ'(س) = \frac{-١}{٢} س^{\frac{-٣}{٢}} = \frac{-١}{٢ \sqrt{س^{٣}}} = \frac{-١س^{\frac{-٣}{٢}}}{٢}$$

$$هـ''(س) = \frac{٣}{٤} س^{\frac{-٥}{٢}} = \frac{٣}{٤ \sqrt{س^{٥}}}$$

$$هـ''(١) = \frac{٣}{٤}$$

س٧: $ه'(س) = ٨س^{٣} + ٣س^{٢} - ٤$

$ه''(س) = ٢٤س^{٢} + ٦س$

$ه^{(٣)}(س) = ٤٨س + ٦$

$ه^{(٤)}(س) = ٤٨$

$ه^{(٥)}(س) = ٠$ ومنها $ه^{(٥)}(١) = ٠$

حلول تمارين ومسائل ٢-٤

س١: ميل المماس $= ه'(-٢)$

$$ه'(س) = \frac{١ \times (٢ + س^{٢}) - ٢س \times (٣ + س)}{(٣ + س)^{٢}}$$

$$ه'(-٢) = \frac{١ \times (٢+٤) - ٤^{-} \times (٣ + ٢^{-})}{(٣ + ٢^{-})^{٢}} = \frac{٦ - ٤^{-}}{١} = ١٠^{-}$$

ميل المماس عندما (س = -٢) = - ١٠

س٢: معادلة المماس هي ص – ص١ = م (س – س١)

س١ = ٠ ، ص١ = ١ ، م = $ه'(٠)$ ، $ه'(س) = ٣س^{٢} + ٤س - ١$

$ه'(٠) = -١ = م_{م}$ ومنها $م_{ع} = ١$

معادلة العمودي على المماس: ص – ١ = ١(س – ٠)

ص - س -١ = صفر

س٣: المماس أفقي تعني أن ميل المماس = صفر ، $ه(س) = ٢س^{٣} + س^{٢} - ٨س - ٤$

ومنها $ه'(س) = ٠$ ، $ه'(س) = ٦س^{٢} + ٢س - ٨$

$٦س^{٢} + ٢س - ٨ = ٠$ ومنها $٣س^{٢} + س - ٤ = ٠$

$(٣س + ٤)(س - ١) = ٠$ ومنها $س = \frac{-٤}{٣}$ ، $س = ١$

س٤: معادلة المماس هي ص – ص١ = م (س – س١) ، (٠ ، ٧)

$$م_م = \frac{-١}{م_ع} = \frac{-١}{\frac{-١}{٣}} = ٣$$

معادلة المماس: ص – ٧ = ٣ (س – ٠)

ص – ٣س- ٧ = ٠

س٥: ميل المماس عندما (س= ١) =١١ تعني أن $ه'(١) = ١١$ ، لكن $ه'(س) = ٢أس + ٥$

$ه'(١) = ١١$ ومنها $٢أ + ٥ = ١١$ ومنها $أ = ٣$

حلول تمارين ومسائل ٢-٥

١) $(ه \circ هـ)'(س) = ه'(هـ(س))هـ'(س)$

حيث $ه'(س) = ٢س$ ، $هـ'(س) = ١$

$(ه \circ هـ)'(س) = ه'(س + ١)هـ'(س)$

$(ه \circ هـ)'(س) = ٢(س + ١) \times ١ = ٢س + ٢$

٢) $\frac{ص}{س} = ٢(٢س - ١) \times ٢ = ٤(٢س - ١) = ٨س - ٤$

٣) $\frac{ص}{س} = \frac{ص}{ع} \times \frac{ع}{س}$

حيث $\frac{ص}{ع} = ٢ع - ٥$ ، $\frac{ع}{س} = ٢$

$\frac{ص}{س} = (٢ع - ٥) \times ٢ = ٤ع - ١٠ = ٤(٢س + ٣) - ١٠ = ٨س + ٢$

٤) $م'(س) = ٤(س^{٢} - س)^{٣} (٢س - ١)$

$م'(٢) = ٤(٤ - ٢)^{٣} (٤ - ١) = ٣ \times ٣٢ = ٩٦$

٥) $ه'(س) = هـ'(٣س^{٢} + ١) \times (٦س)$

$ه'(١) = هـ'(٣ \times ١ + ١) \times (٦ \times ١) = هـ'(٤) \times (٦) = ٢ \times ٦ = ١٢$

٦) $(ه \circ هـ)'(٢) = ه'(هـ(٢))هـ'(٢)$

$= ه'(٤) \times ٣ = -٢ \times ٣ = -٦$

$(هـ \circ ه)'(٢) = هـ'(ه(٢))ه'(٢) = هـ'(٣) \times ٥ = ١ \times ٥ = ٥$

حلول تمارين ومسائل ٢ - ٦

س١:

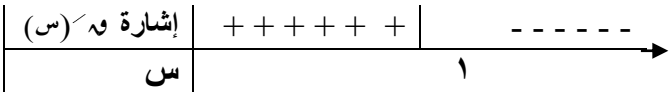
أ. $ه(س) = ٤س - ٢س^{٢}$

$ه'(س) = ٤ - ٤س$

$ه'(س) = ٠$

شركة الرائد للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبدالرحمن شقير
00970568-952714

$٤ - ٤س = ٠$ ومنها $س = ١$



نلاحظ أن

إشارة $هـ´(س)$ تغيرت من موجبة إلى سالبة حول (س= ١) $\Leftarrow$ $هـ(١)$ قيمة عظمى محلية للاقتران $هـ(س)$ وتساوي $هـ(١) = ٤ - ٢ \times ١ = ٢$

ب. $هـ(س) = س(س^{٢} - ١٢) = س^{٣} - ١٢ س$

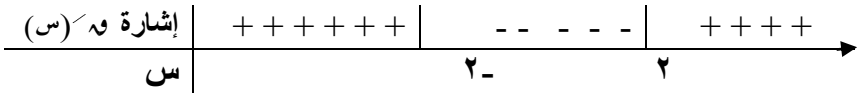
$هـ´(س) = ٣س^{٢} - ١٢$

$هـ´(س) = ٠$

$٣س^{٢} - ١٢ = ٠$

$٣(س^{٢} - ٤) = ٠$ ومنها $س^{٢} - ٤ = ٠$

$(س + ٢)(س - ٢) = ٠$ ومنها $س = -٢$، $س = ٢$



نلاحظ أن

إشارة $هـ´(س)$ تغيرت من موجبة إلى سالبة حول (س= -٢) $\Leftarrow$ $هـ(-٢)$ قيمة عظمى محلية للاقتران $هـ(س)$ وتساوي $هـ(-٢) = ١٦$.

إشارة $هـ´(س)$ تغيرت من سالبة إلى موجبة حول (س=٢) $\Leftarrow$ $هـ(٢)$ قيمة صغرى محلية للاقتران $هـ(س)$ وتساوي $هـ(٢) = -١٦$.

ج. $هـ(س) = س^{٣} - ٣س + ٢$ ، $س \in ح$

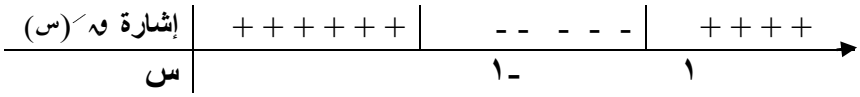
$هـ´(س) = ٣س^{٢} - ٣$

$هـ´(س) = ٠$

$٣س^{٢} - ٣ = ٠$

$٣(س^{٢} - ١) = ٠$ ومنها $س^{٢} - ١ = ٠$

$(س + ١)(س - ١) = ٠$ ومنها $س = -١$، $س = ١$



نلاحظ أن

إشارة $هـ´(س)$ تغيرت من موجبة إلى سالبة حول (س= -١) $\Leftarrow$ $هـ(-١)$ قيمة عظمى محلية للاقتران $هـ(س)$ وتساوي $هـ(-١) = ٤$.

إشارة $ه'(س)$ تغيرت من سالبة إلى موجبة حول (س = ١) $\Leftarrow$ $ه(١)$ قيمة صغرى محلية للاقتران $ه(س)$ وتساوي $ه(١) = ٠$

د. $ه(س) = -س^{٢} + ١٠س + ٥$ ، س $\in$ ح

$ه'(س) = -٢س + ١٠$

$ه'(س) = ٠$

$-٢س + ١٠ = ٠$ ومنها $س = ٥$

نلاحظ أن إشارة $ه'(س)$ تغيرت من موجبة إلى سالبة

إشارة ه'(س)	+ + + + + +	- - - - - -
س	٥	

حول (س = ٥) $\Leftarrow$ $ه(٥)$ قيمة عظمى محلية للاقتران $ه(س)$ وتساوي $ه(٥) = ٣٠$

س٢: عين القيم القصوى المحلية للاقتران $ه(س) = س^{٢} - ٢س + ١$.

$ه'(س) = ٢س - ٢$

$ه'(س) = ٠$

$٢س - ٢ = ٠$

$س = ١$

إشارة ه'(س)	- - - - - -	+ + + + + +
س	١	

نلاحظ أن إشارة $ه'(س)$ تغيرت من سالبة إلى موجبة حول (س=١) $\Leftarrow$ $ه(١)$ قيمة صغرى محلية للاقتران $ه(س)$ وتساوي $ه(١)$ = صفر.

س٣: $ه(-٢)$ قيمة عظمى محلية $\Leftarrow$ $ه'(-٢) = ٠$

$ه'(س) = -٢س + ب$

$ه'(-٢) = ٠ \Leftarrow -٢ \times -٢ + ب = ٠$ ومنها $ب = -٤$

س٤: $ه'(س) = ٣س^{٢}$

$ه'(س) = ٠$

$٣س^{٢} = ٠$ ومنها $س = ٠$

إشارة ه'(س)	+ + + + + +	+ + + + + +
س	٠	

نلاحظ أن إشارة $ه'(س)$ لم تتغير حول (س = ٠)، $ه(٠)$ ليست قيمة قصوى، ومنها $ه(س)$ ليس له أي قيم قصوى.

س٥:

إشارة ه'(س)	+ + + + + +	- - - - - -	+ + + +
س		-٢	٢

نلاحظ أن

إشارة $\text{ه}'(\text{س})$ تغيرت من موجبة إلى سالبة حول (س= -٢) $\Longleftarrow$ عند (س= -٢) يوجد قيمة عظمى محلية.

إشارة $\text{ه}'(\text{س})$ تغيرت من سالبة إلى موجبة حول (س=٢) $\Longleftarrow$ عند (س= ٢) يوجد قيمة صغرى محلية.

حلول تمارين عامة ٢ ـ ٧

س١:

الفقرة	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
الإجابة	أ	ب	ج	ب	د	أ	د	ج	ب	ج

س٢: متوسط التغير $= \dfrac{\text{ه}(٥)-\text{ه}(٢)}{٥-٢} = ١٠$

$\text{ه}(٥)-\text{ه}(٢) = ٣٠$

$\text{ه}(٥)-٦ = ٣٠$ ومنها $\text{ه}(٥) = ٣٦$

س٣: متوسط التغير $= \dfrac{\text{ه}(أ)-\text{ه}(٢)}{أ-٢} = ٦$

$\text{ه}(أ)-\text{ه}(٢) = ٦(أ-٢)$

$أ^{٢}+٣-٧ = ١٢-أ٦$

$أ^{٢}-أ١٦+٨ = ٠$

$(أ-٤)(أ-٢) = ٠$ ومنها $أ = ٤$ ، $أ = ٢$ لكن ٢ مرفوضة، ومنها $أ = ٤$

س٤: $\text{ن}'(٣) = \underset{\text{هـ}\to٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ن}(٣+\text{هـ})-\text{ن}(٣)}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to٠}{\text{نهـا}} \dfrac{(٣+\text{هـ})^{٢}+١-١٠}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ}\to٠}{\text{نهـا}} \dfrac{٩+٦\text{هـ}+\text{هـ}^{٢}+١-١٠}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to٠}{\text{نهـا}} \dfrac{٦\text{هـ}+\text{هـ}^{٢}}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ}\to٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{هـ}(٦+\text{هـ})}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ}\to٠}{\text{نهـا}}\ ٦+\text{هـ} = ٦$

س٥: $\underset{\text{هـ}\to٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ن}(٢+\text{هـ})-\text{ن}(٢)}{\text{هـ}} = \text{ن}'(٢)$

$\text{ن}'(\text{س}) = (\text{س}^{٢}+٢) \times ٣ + (٣\text{س}+٤) \times ٢\text{س}$

$\text{ن}'(٢) = ٦ \times ٣ + ١٠ \times ٤ = ٥٨$

شركة الراتب للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبدالرحمن شقير
00970568-952714

$$\text{نهـــا}_{هـ\leftarrow 0} \frac{ن(٢+هـ)-ن(٢)}{هـ} = ٥٨$$

س٦: $م'(س) = س^{٢} \times هـ'(س) + هـ(س) \times ٢س$

$م'(٣) = ٩ \times هـ'(٣) + هـ(٣) \times ٦ \quad = ٩ \times ٥ + ٦ \times ٢^{-} = ٣٣$

س٧: معادلة العمودي هي $ص - ص_{١} = م_{ع}(س - س_{١})$

$س = ١، \ ص = هـ(١) = ٣ \quad ، \quad م_{ع} = \frac{-١}{م_{م}}$ لكن $م_{م} = هـ'(١)$

$هـ'(س) = ٣س^{٢} + ١٠س$ ومنها $هـ'(١) = ١٣ = م_{م}$ ومنها $م_{ع} = \frac{-١}{١٣}$

معادلة العمودي: $ص - ٣ = \frac{-١}{١٣}(س - ١)$

$١٣ص + س - ٤٠ = ٠$

س٨: ميل المماس $= ٤ \longleftarrow هـ'(١) = ٤$

$هـ'(س) = ٢أس + ٣$

$هـ'(١) = ٢أ + ٣ = ٤$ ومنها قيمة الثابت $أ = \frac{١}{٢}$

س٩: $هـ'(س) = ٣س^{٢} + ٦س$

$هـ'(س) = ٠$

$٣س^{٢} + ٦س = ٠$

$٣س(س + ٢) = ٠ \quad ، \quad س = ٠ \ ، \ س = ٢^{-}$

إشارة هـ'(س)	+ + + + + +	- - - - - -	+ + + +
س		-٢	٠

نلاحظ أن

إشارة $هـ'(س)$ تغيرت من موجبة إلى سالبة حول (س= -٢) $\Longleftarrow$ $هـ(٢^{-})$ قيمة عظمى محلية وتساوي ١١.

إشارة $هـ'(س)$ تغيرت من سالبة إلى موجبة حول (س=٠) $\Longleftarrow$ $هـ(٠)$ قيمة صغرى محلية وتساوي ٧

شركة الرائد للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبدالرحمن شقير
00970568-952714

الوحدة الثالثة

الإحصاء والاحتمال

حلول تمارين ومسائل ٣ ـ ١

س١:

$$\mu = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} س_ر}{ن} = \frac{٤٠+٥٠+٦٠+٧٠+٥٥}{٥} = \frac{٢٧٥}{٥} = ٥٥$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{ر=١}^{ن} (س-\mu)^{٢}}{ن}} = \sqrt{\frac{٥٠٠}{٥}} = \sqrt{١٠٠} = ١٠$$

س	$س - \mu$	$(س-\mu)^{٢}$	$ع = \frac{س-\mu}{\sigma}$
٤٠	١٥-	٢٢٥	$\frac{١٥-}{١٠} = ١,٥-$
٥٠	٥-	٢٥	$\frac{٥-}{١٠} = ٠,٥-$
٦٠	٥	٢٥	$\frac{٥}{١٠} = ٠,٥$
٧٠	١٥	٢٢٥	$\frac{١٥}{١٠} = ١,٥$
٥٥	٠		$\frac{٠}{١٠} = ٠$
المجموع		٥٠٠	

س٢:

اللغة العربية $ع = \frac{٧٢-٦٩}{١} = \frac{٣}{١} = ٣$

المحاسبة $ع = \frac{٦٩-٦٨}{٤} = \frac{١}{٤}$

الرياضيات $ع = \frac{٧٥-٧٩}{٢} = \frac{٤-}{٢} = ٢-$

تحصيل علي كان أفضل في اللغة العربية .

س٣: $\mu = ١٧$ ، $\sigma = ٣$

شركة الراتب للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبدالرحمن شقير
00970568-952714

$$ع = \frac{\mu - س}{\sigma} \Leftarrow ٢ = \frac{١٧ - س}{٣}$$
$$٦ = ١٧ - س$$
$$س = ٢٣$$
$$ع = \frac{\mu - س}{\sigma} \Leftarrow -١,٨ = \frac{١٧ - س}{٣}$$
$$-٥,٤ = ١٧ - س$$
$$س = ١١,٦$$

س٤ :

$$٠,٥ + ٥ و٠ ك + -١,٥ + ٠ + ٠,٥ = ٠$$
$$٥ و٠ ك + -١,٥ = ٠ \Leftarrow ٥ و٠ ك = ١,٥$$
$$\Leftarrow ك = \frac{١,٥}{٥ و٠} = ٣$$

بحساب الانحراف المعياري للعلامات المعيارية سنجد بأن $\sigma = ١$

س٥:

$$ع_{٤٤} = \frac{\mu - س}{\sigma}$$
$$-٢ = \frac{\mu - ٤٤}{\sigma} \Leftarrow -٢\sigma = \mu - ٤٤ \ldots\ldots(١)$$
$$ع_{٨٤} = \frac{\mu - س}{\sigma}$$
$$٣ = \frac{\mu - ٨٤}{\sigma} \Leftarrow ٣\sigma = \mu - ٨٤ \ldots\ldots(٢)$$

$$-٢\sigma = \mu - ٤٤$$
$$-١٦ = \mu - ٤٤$$
$$\mu = ٤٤ + ١٦$$
$$= ٦٠$$

$$-٢\sigma = \mu - ٤٤$$
$$٣\sigma = \mu - ٨٤$$
$$-٥\sigma = -٤٠$$
$$\Leftarrow \sigma = ٨$$

س٦:

$$ع_{٨٥} = \frac{س - \mu}{\sigma}$$

$$١ = \frac{\mu - ٨٥}{\sigma} \Leftarrow \sigma = \mu - ٨٥ \quad .....(١)$$

$$ع_{٧٠} = \frac{س - \mu}{\sigma}$$

$$-٢ = \frac{\mu - ٧٠}{\sigma} \Leftarrow \sigma ٢- = \mu - ٧٠ \quad .....(٢)$$

$$\mu - ٨٥ = \sigma$$
$$\pm \mu \mp ٧٠ = \pm \sigma ٢$$
$$\sigma ٣ = ١٥$$
$$\sigma = ٥$$

$$\mu - ٨٥ = \sigma$$
$$\mu - ٨٥ = ٥$$
$$\mu - ٨٥ - ٥ =$$
$$\mu - ٨٠ -$$
$$\mu = ٨٠$$

$$\therefore ع_{٧٥} = \frac{٨٠ - ٧٥}{٥}$$
$$= \frac{٥-}{٥} = -١$$

حلول تمارين ومسائل ٣ ـ ٢

س١: أ) المساحة تحت $(ع = ١,٣٨) = ٠,٩١٦٢$

ب) المساحة فوق $(ع = ٠,٩) = ١-$ المساحة تحت $(ع = ٠,٩) = ١ - ٠,٨١٥٩ = ٠,١٨٤١$

ج) المساحة بين $(ع = ١,٥)$ و $(ع = -١,٥)$ = المساحة تحت $(ع = ١,٥)$ - المساحة تحت $(ع = -١,٥)$

$$= ٠,٩٣٣٢ - ٠,٠٦٦٨ = ٠,٨٦٦٤$$

س٢:

أ) المساحة تحت $ع = ٠,٨٥٥٤$ بالرجوع إلى جدول التوزيع الطبيعي المعياري نجد $ع = ١,٠٦$

ب) المساحة تحت $ع = ١ - ٠,٧٧٣٤ = ٠,٢٢٦٦$ ومن الجدول $ع = -٠,٧٥$.

ج) بما أن المساحة بين (–ع و ع) = ٠,٦٠
فإن المساحة تحت (– ع) + المساحة فوق (ع) = ١ – ٠,٦ = ٠,٤
ومنها المساحة تحت (– ع) = $\frac{٠,٤}{٢}$ = ٠,٢ والمساحة تحت ع = ٠,٦ + ٠,٢ = ٠,٨
من الجدول نجد ع = تقريبا ٠,٨٤

س٣:

ع $_{١٥٠}$ = $\frac{١٥٠-١٦٥}{١٠}$ = $\frac{-١٥}{١٠}$ = –١,٥

ع $_{١٨٠}$ = $\frac{١٨٠-١٦٥}{١٠}$ = $\frac{١٥}{١٠}$ = ١,٥

نسبة الطلبة = المساحة بين (ع= ١,٥ و ع= - ١,٥) = ٠,٩٣٣٢ – ٠,٠٦٦٨ = ٠,٨٦٦٤
ومنها عدد الطلبة = ٠,٨٦٦٤ × ٥٠٠ = ٤٣٣

س٤:

μ = ١٢ ، σ = ٢ عدد أيام السنة ٣٦٥

أ) ع = $\frac{١٢-١٧}{٢}$ = ٢,٥

نسبة المساحة فوق (ع = ٢,٥٠) = ١ – المساحة تحت (ع = ٢,٥٠)
= ١ – ٠,٩٩٣٨ = ٠,٠٠٦٢
عدد الأيام = ٠,٠٠٦٢ × ٣٦٥ = ٢ يوم تقريبا.

ب) ع $_{١}$ = $\frac{١٢-٩}{٢}$ = –١,٥ ، ع $_{٢}$ = $\frac{١٢-١٣}{٢}$ = ٠,٥

المساحة بين (ع $_{١}$ و ع $_{٢}$) = ٠,٦٩١٥ – ٠,٠٦٦٨ = ٠,٦٢٤٧
عدد الأيام = ٠,٦٢٤٧ × ٣٦٥ = ٢٢٨ يوماً

س٥:

أ) ع $_{٧٨}$ = $\frac{٧٢-٧٨}{٨}$ = $\frac{٦}{٨}$ = ٠,٧٥ ، ع $_{٦٢}$ = $\frac{٧٢-٦٢}{٨}$ = $\frac{-١٠}{٨}$ = –١,٢٥

نسبة الطلبة = المساحة بين (ع = ٠,٧٥)، (ع =- ١,٢٥)
= المساحة تحت (ع = ٠,٧٥) – المساحة تحت (ع =- ١,٢٥)
= ٠,٧٧٣٤ – ٠,١٠٥٦ = ٠,٦٦٧٨
ومنها النسبة المئوية للطلبة = ٠,٦٦٧٨ × ١٠٠٪ = ٦٦,٧٨٪
ب) نسبة الطلبة الراسبين = المساحة تحت (ع = ٦٠)

شركة الراتب للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبدالرحمن فقير
00970568-952714

$$ع_{٦٠} = \frac{٦٠-٧٢}{٨} = \frac{-١٢}{٨} = -١,٥$$

نسبة الطلبة الراسبين = المساحة تحت (ع =- ١,٥) = ٠,٠٦٦٨

عدد الطلبة الراسبين = ٠,٠٦٦٨ × ٦٠٠ = ٤٠

س٦:

$$ع_{٦٨٠} = \frac{٦٨٠-٧٠٠}{٢٠} = \frac{-٢٠}{٢٠} = -١ \text{ ، } ع_{٧٤٠} = \frac{٧٤٠-٧٠٠}{٢٠} = \frac{٤٠}{٢٠} = ٢$$

المساحة بين (ع = ٢) و (ع =- ١) = المساحة تحت (ع = ٢) – المساحة تحت (ع =- ١)

= ٠,٩٧٧٢ – ٠,١٥٨٧ = ٠,٨١٨٥

عدد الموظفين = ٠,٨١٨٥ × ١٠٠٠ = ٨١٩ موظفاً.

حلول تمارين ومسائل ٣ – ٣

س١:

الفقرة	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
الإجابة	جـ	جـ	د	ب	أ	ب	ب	أ	د	أ

س٢:

$$ع_{٧١} = \frac{س - \mu}{\sigma}$$

$$٠,٥ = \frac{٧١ - \mu}{\sigma} \Leftarrow ٠,٥\sigma = ٧١ - \mu \quad .....(١)$$

$$ع_{٥٣} = \frac{س - \mu}{\sigma}$$

$$-١ = \frac{٥٣ - \mu}{\sigma} \Leftarrow -\sigma = ٥٣ - \mu \quad .....(٢)$$

بحل المعادلتين ينتج أن:

$$\mu - ٧١ = ٠,٥\sigma$$
$$\pm \sigma = \pm (\mu - ٥٣)$$
$$١,٥\sigma = ١٨$$
$$\sigma = ١٢ \Leftarrow$$

$$\mu - ٧١ = ٠,٥\sigma$$
$$\mu - ٧١ = ٦$$
$$\mu = ٧١ - ٦$$
$$= ٦٥$$

شركة الراتب للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبدالرحمن شقير
00970568-952714

شركة الرائد للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبدالرحمن شقير
00970568-952714

س٣: أ) $ع_{١,٠٣} = \frac{١,٠٣ - ١,٠١}{٠,٠٢} = ١$

نسبة الأكياس = المساحة تحت (ع = ١) = ٠,٨٤١٣

ب) $ع_{١} = \frac{١ - ١,٠١}{٠,٠٢} = -٠,٥$ ، $ع_{١,٠٥} = \frac{١,٠٥ - ١,٠١}{٠,٠٢} = ٢$

نسبة الأكياس = المساحة بين (ع= -٠,٥ و ع= ٢)

= المساحة تحت (ع= ٢) - المساحة تحت (ع= -٠,٥)

= ٠,٩٧٧٢ - ٠,٣٠٨٥ = ٠,٦٦٨٧

س٤:

أ) $ع_{١١٠٠٠٠} = \frac{١١٠٠٠٠ - ١٠٠٠٠٠}{١٠٠٠٠} = ١$ ، $\frac{٩٠٠٠٠ - ١٠٠٠٠٠}{١٠٠٠٠} = -١$

نسبة البطاريات المطلوبة = المساحة بين (ع = ١) و (ع = - ١)

= المساحة تحت (ع = ١) – المساحة تحت (ع = - ١)

= ٠,٨٤١٣ - ٠,١٥٨٧ = ٠,٦٨٢٦

عدد البطاريات = ٠,٦٨٢٦ × ٢٠٠٠٠ = ١٣٦٥٢ بطارية

ب) $ع_{١٢٠٠٠٠} = \frac{١٢٠٠٠٠ - ١٠٠٠٠٠}{١٠٠٠٠} = ٢$

نسبة البطاريات = المساحة فوق (ع = ٢)

= ١ - ٠,٩٧٧٢ = ٠,٠٢٢٨

عدد البطاريات = ٠,٠٢٢٨ × ٢٠٠٠٠ = ٤٥٦

ج)

$ع_{١١٠٠٠٠} = \frac{١١٠٠٠٠ - ١٠٠٠٠٠}{١٠٠٠٠} = ١$ ، $ع_{٨٠٠٠٠} = \frac{٨٠٠٠٠ - ١٠٠٠٠٠}{١٠٠٠٠} = -٢$

نسبة البطاريات = المساحة تحت (ع = ١) – المساحة تحت (ع = - ٢)

= ٠,٨٤١٣ - ٠,٠٢٢٨ = ٠,٨١٨٥

النسبة المئوية = ٠,٨١٨٥ × ١٠٠٪ = ٨١,٨٥٪

س٥: أ) $ع_{٥٠} = \frac{٤٠ - ٥٠}{٥} = ٢$

نسبة الأعضاء = المساحة فوق (ع = ٢)

= ١ - المساحة تحت (ع = ٢) = ١ - ٠,٩٧٧٢ = ٠,٠٢٢٨

عدد الأعضاء = ٠,٠٢٢٨ × ٤٠٠ = ٩

ب) $ع_{٣٥} = \frac{٤٠ - ٣٥}{٥} = \frac{-٥}{٥} = -١$ ، $ع_{٤٥} = \frac{٤٠ - ٤٥}{٥} = \frac{٥}{٥} = ١$

نسبة الأعضاء = المساحة بين (ع = ١) و (ع =- ١)
= المساحة تحت (ع = ١) - المساحة تحت (ع =- ١)
= ٠,٨٤١٣ − ٠,١٥٨٧ = ٠,٦٨٢٦
عدد الأعضاء = ٠,٦٨٢٦ × ٤٠٠ = ٢٧٣ عضواً .

الوحدة الرابعة
التكامل

حلول تمارين ومسائل ٤ – ١

س١:

	المشتقة $ن'(س)$	الاقتران الأصلي $ن(س)+جـ$
١.	$٤س^{٣}$	$س^{٤}+جـ$
٢.	$٤س^{٣}+٣س^{٢}+٢$	$س^{٤}+س^{٣}+٢س+جـ$
٣.	$٢س+١$	$س^{٢}+س+جـ$
٤.	$٤س^{٣}+٣$	$\int(٤س^{٣}+٣)دس$

س٢:

العبارة	أ	ب	ج	د	ه	و
الإجابة	✗	✓	✗	✓	✗	✓

س٣: $ن'(س)=\frac{س^{٢}+٣}{س+١}$.

حلول تمارين ومسائل ٤ – ٢

س١:

أ. $\int س^{\frac{٢}{٣}}دس=\frac{٣}{٥}س^{\frac{٥}{٣}}+جـ$ ب. $\int \pi دع=\pi ع+جـ$

ج. $\int س\sqrt{٥-س^{٢}}دس=-\frac{(٥-س^{٢})^{\frac{٣}{٢}}}{٣}+جـ$

د. $\int(٢س^{٢}+٣)^{٢}دس=\int(٤س^{٤}+١٢س^{٢}+٩)دس=\frac{٤س^{٥}}{٥}+٤س^{٣}+٩س+جـ_{٢}$

$=\frac{٤س^{٥}}{٥}+٤س^{٣}+٩س+جـ$

ه. $\int(٧س^{٣}-\frac{٢}{س^{٢}}+١)دس=\int ٧س^{٣}دس-\int ٢س^{-٢}دس+\int ١دس$

$=\frac{٧س^{٤}}{٤}-\frac{٢س^{-١}}{-١}+س+جـ=\frac{٧س^{٤}}{٤}+\frac{٢}{س}+س+جـ$

و. $\int ك^{٢}دس=ك^{٢}س+جـ$

س٢: $\int(٢ص-٥)(ص+٣)دص=\int(٢ص^{٢}+ص-١٥)دص=\frac{٢ص^{٣}}{٣}+\frac{ص^{٢}}{٢}-١٥ص+جـ$

شركة الرائد للتفوق والإبداع التقاني
د. عبدالرحمن قاسم
00970568-952714

س٣: $\int \frac{٦ + ٥ل - ل^{٢}}{(ل - ٢)(ل - ٣)} دل = \int (ل - ٣) دل = \frac{ل^{٢}}{٢} - ٣ل + جـ$

س٤: $\int (٢س + ١)(س^{٣} + س^{٢} - ٣س + ٤) دس = \int (٢س^{٤} + ٣س^{٣} - ٥س^{٢} + ٥س + ٤) دس$

$= \frac{٢س^{٥}}{٥} + \frac{٣س^{٤}}{٤} - \frac{٥س^{٣}}{٣} + \frac{٥س^{٢}}{٢} + ٤س + جـ$

س٥: $ق'(س) = ٣س^{٣} + ٥س^{٢} - ٢س + ٤$

س٦: $\frac{دص}{دس} = (٢س + ٢)(س^{٢} + ٢س)^{٥}$

حلول تمارين ومسائل ٤ - ٣

س١: $هـ(س) = \int هـ'(س) دس = \int ٥ دس = ٥س + جـ$

$هـ(س)$ يمر بالنقطة (٢ ، ٣)، $هـ(٢) = ٣$

$هـ(٢) = ٥ \times ٢ + جـ$ ومنها $٣ = ١٠ + جـ$ ، ومنها $جـ = -٧$

$هـ(س) = ٥س - ٧$

س٢: $هـ(س) = \int هـ'(س) دس = \int (س + ٣) دس = \frac{س^{٢}}{٢} + ٣س + جـ$

$هـ(س)$ يمر بالنقطة (٢ ، ٧)، $هـ(٢) = ٧$

$هـ(٢) = ٢ + ٦ + جـ = ٧$ ، ومنها $جـ = -١$

$هـ(س) = \frac{س^{٢}}{٢} + ٣س - ١$

س٣: $ك(س) = \int ك'(س) دس = \int (س + ١)^{٣} دس = \int (س^{٣} + ٣س^{٢} + ٣س + ١) دس$

$= \frac{س^{٤}}{٤} + س^{٣} + \frac{٣س^{٢}}{٢} + س + جـ$

$ك(٠) = ٢ = جـ$

$ك(س) = \frac{س^{٤}}{٤} + س^{٣} + \frac{٣س^{٢}}{٢} + س + ٢$

$ك(٢) = ٢٢$

س٤:

شركة الراتب للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبد الرحمن عقيلي
00970568-952714

$$\text{ه}'(س) = \int \text{ه}''(س)\,د س = \int (-١٢س + ٢)\,د س$$

$$= \frac{-١٢س^{٢}}{٢} + ٢س + جـ = -٦س^{٢} + ٢س + جـ$$

لكن $\text{ه}'(٠) = ٤$ لأن ميل المماس عند النقطة (٠ ، ٣) يساوي ٤ ومنها $جـ = ٤$

$$\text{ه}'(س) = -٦س^{٢} + ٢س + ٤$$

$$\text{ه}(س) = \int \text{ه}'(س)\,د س = \int (-٦س^{٢} + ٢س + ٤)\,د س = -٢س^{٣} + س^{٢} + ٤س + جـ_{١}$$

لكن $\text{ه}(٠) = ٣$ لأن منحنى $\text{ه}(س)$ يمر بالنقطة (٠ ، ٣) ومنها $جـ_{١} = ٣$

$$\text{ه}(س) = -٢س^{٣} + س^{٢} + ٤س + ٣$$

حلول تمارين ومسائل ٤ ـ ٤

س١: أحسب قيمة كل من التكاملات الآتية:

أ. $\int_{-١}^{٢} ٦\pi\,د س = \Big|_{-١}^{٢} ٦\pi س = ١٢\pi - (-٦\pi) = ١٨\pi$

ب. $\int_{٠}^{٢} (٥ - ٣س^{٢})\,د س = \Big|_{٠}^{٢} (٥س - س^{٣}) = (٥ \times ٢ - ٨) - (٠ - ٠) = ٢$

ج. $\int_{١}^{٣} (\frac{١}{س^{٢}} - \frac{١}{س^{٣}})\,د س = \int_{١}^{٣} (س^{-٢} - س^{-٣})\,د س$

$$= \Big|_{١}^{٣} (\frac{س^{-١}}{-١} - \frac{س^{-٢}}{-٢}) = \Big|_{١}^{٣} (\frac{-١}{س} + \frac{١}{٢س^{٢}})$$

$$= (\frac{-١}{٣}) - (\frac{١}{١٨} + \frac{-١}{١}) = \frac{-٥}{١٨} + \frac{١}{٢} = \frac{٢}{٩}$$

د. $\int_{١}^{٨} \sqrt[٣]{س}\,د س = \int_{١}^{٨} س^{\frac{١}{٣}}\,د س = \Big|_{١}^{٨} \frac{٣س^{\frac{٤}{٣}}}{٤}$

$$= \frac{٣\sqrt[٣]{س^{٤}}}{٤} \Big|_{١}^{٨} = (\frac{١٦ \times ٣}{٤}) - (\frac{١ \times ٣}{٤}) = \frac{٤٥}{٤}$$

س٢: $\int_{٣}^{٥} ب^{٢}\,د س = ٣٢$ منها $ب^{٢} = ٣٢$،

$٥ب^{٢} - ٣ب^{٢} = ٣٢$ ومنها $٢ب^{٢} = ٣٢$

شركة الراتب للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبدالرحمن شقير
00970568-952714

شركة الراتب للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبدالرحمن شقير
00970568-952714

ب^{٢} = ١٦ ومنها ب = ±٤ .

س٣: أ $\int_{-٢}^{أ} (٣س - س^{٢}) = ٠$ صفر، منها

$\int_{٠}^{٢} (٣ - ٢س) د س =$

$(١٣ - أ^{٢}) - (٣ \times ^{-}٢ - ٤) = ٠$ ومنها $١٣ - أ^{٢} + ١٠ = ٠$

$أ^{٢} - ١٣أ + ١٠ = ٠$ ومنها $(أ - ٥)(أ + ٢) = ٠$

$أ = ٥ ، ^{-}٢$

س٤: $\int_{٠}^{٢} (٤س^{٢} - ٤س + ١) د س = \int_{٠}^{٢} (٢س - ١)^{٢} د س$

$= (\frac{٤س^{٣}}{٣} - ٢س^{٢} + س) \Big|_{٠}^{٢}$

$= (\frac{٣٢}{٣} - ٨ + ٢) - (٠) = \frac{١٤}{٣}$

س٥:

أ. ص $= \int (٤س^{٣} + ٢س - ٥) د س$ ، $\frac{د ص}{د س} = ٤س^{٣} + ٢س - ٥$

ب. ص $= \int_{٧}^{} (٤س^{٣} + ٢س - ٥) د س$ ، $\frac{د ص}{د س} =$ صفر.

حلول تمارين ومسائل ٤ ـ ٥

س١: $\int_{٢}^{} (س^{٢} - ٦س) د س =$ صفر

س٢: أ. $\int_{٢}^{٣} (س - ٦) د س = (\frac{س^{٢}}{٢} - ٦س) \Big|_{٢}^{٣} = (\frac{٩}{٢} - ١٨) - (\frac{٤}{٢} - ١٢) = \frac{-٧}{٢}$

ب. $\int_{٢}^{٥} (س - ٦) د س = (س^{٢} - ٦س) \Big|_{٢}^{٥} = (\frac{٢٥}{٢} - ٣٠) - (\frac{٤}{٢} - ١٢) = \frac{-١٥}{٢}$

ج. $\int_{٣}^{٥} (س - ٦) د س = \int_{٣}^{٥} (س - ٦) د س - \int_{٣}^{٣} (س - ٦) د س = -٤$

شركة الراتب للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبدالرحمن شقير
00970568-952714

س٣: إذا كان $\int_{0}^{2} ن(س)\,ﻫ(س)\,س = -٣$ ، $\int_{0}^{2} ن(س)\,ﻫ(س)\,س = ٤$ ، فإن:

أ- $\int_{0}^{2} ن(س)\,ﻫ(س)\,س = -٣ \int_{0}^{2} ﻫ(س)\,س$

$= -٣ \times ٢ = -٦$ ومنها $\int_{0}^{2} ﻫ(س)\,س = \frac{٤}{٢} = ٢$ لكن

$= -٣ \int_{0}^{2} ﻫ(س)\,س$ $\int_{0}^{2} ن(س)\,ﻫ(س)\,س$

ب- $\int_{0}^{2} ن(س)\,ﻫ(س)\,س = \int_{-١}^{2} ﻫ(س)\,س + \int_{0}^{2} ﻫ(س)\,س$

لكن $\int_{0}^{2} ن(س)\,ﻫ(س)\,س = -٣$ ، $\int_{0}^{2} ﻫ(س)\,س = ٢$ ، $\int_{2}^{0} ﻫ(س)\,س = -٢$

ومن ذلك $\int_{0}^{2} ن(س)\,ﻫ(س)\,س = \int_{-١}^{2} ﻫ(س)\,س + \int_{2}^{0} ﻫ(س)\,س = -٣ + -٢ = -٥$

ج- $\int_{0}^{2} (٣ﻫ(س) + س)\,س = \int_{-١}^{2} ٣ﻫ(س)\,س + \int_{-١}^{2} س\,س$

$= ٣ \int_{-١}^{2} ﻫ(س)\,س + \int_{-١}^{2} س\,س = ٣ \times -٣ + \left| \frac{س^{٢}}{٢} \right|_{-١}^{2}$

$= -٩ + (٢) - (\frac{١}{٢}) = \frac{-١٥}{٢}$

س٤: $\int_{0}^{3} (٥هـ(س) - ٣ن(س))\,س = ٥ \int_{2}^{3} هـ(س)\,س - ٣ \int_{2}^{3} ﻫ(س)\,س$

لكن $\int_{2}^{3} ﻫ(س)\,س = \frac{١٢}{٣} = ٤$ ، $\int_{2}^{3} هـ(س)\,س = \frac{٦}{-٢} = -٣$

ومن ذلك $\int_{1}^{3}(٥هـ(س)-٣ن(س))دس = ٥\times ٣^{-}-٣\times ٤ = ٢٧^{-}$

س٥: $\int_{١}^{أ}(٢س+٥)دس = ٠$

$(س^{٢}+٥س)\Big|_{١}^{أ} = (أ^{٢}+٥أ)-(١+٥) = ٠$

$أ^{٢}+٥أ-٦ = ٠$ ومنها $(أ+٦)(أ-١) = ٠$ ومنها $أ = -٦$ ، $أ = ١$

حلول تمارين ومسائل ٤-٦

س١:

$\int(٢-٣س)^{٣}دس$

نفرض ص $= ٢-٣س$ ، $\frac{دص}{دس} = -٣$ ، $دس = \frac{دص}{-٣}$

نعوض في التكامل $= \int ص^{٣}\frac{دص}{-٣}$

$= \int ص^{٣}دص\times\frac{-١}{٣} = \frac{-١}{٣}\int ص^{٣}دص = \frac{-١}{٣}\times\frac{ص^{٤}}{٤}+جـ = \frac{-(٢-٣س)^{٤}}{١٢}+جـ$

س٢: $\int\frac{٣}{(س-١)^{٥}}دس = \int ٣(س-١)^{-٥}دس$

نفرض ص $= س-١$

$\frac{دص}{دس} = ١$ ، $دس = دص$

نعوض في التكامل $\int ٣(س-١)^{-٥}دس = \int ٣ص^{-٥}دص = \frac{٣ص^{-٤}}{-٤}+جـ$

$= \frac{-٣(س-١)^{-٤}}{٤}+جـ = \frac{-٣}{٤(س-١)^{٤}}+جـ$

س٣: $=$

$\int(أس+ب)^{٤}دس$

نفرض ص $= أس+ب$ ، $\frac{دص}{دس} = أ$ ، $دس = \frac{دص}{أ}$

نعوض في التكامل $\int (أس + ب)^{٤}\, ءس = \int ص^{٤}\, \frac{ءص}{أ} = \frac{ص^{٥}}{٥أ} + جـ$

$$= \frac{(أس + ب)^{٥}}{٥أ} + جـ$$

س٤:

$\int س^{٢}(س^{٣} + ١)^{٤}\, ءس$

نفرض $ص = س^{٣} + ١$ ، $\frac{ءص}{ءس} = ٣س^{٢}$ ، $ءس = \frac{ءص}{٣س^{٢}}$

نعوض في التكامل $\int س^{٢}(س^{٣} + ١)^{٤}\, ءس = \int س^{٢} ص^{٤}\, \frac{ءص}{٣س^{٢}}$

$$= \frac{١}{٣}\int ص^{٤}\, ءص = \frac{ص^{٥}}{١٥} + جـ$$

$$= \frac{(س^{٣} + ١)^{٥}}{١٥} + جـ$$

س٥: $\int_{١}^{٢} (٢س - ٣)^{٢}\, ءس$

نجد التكامل غير المحدود $\int (٢س - ٣)^{٢}\, ءس$

نفرض $ص = ٢س - ٣$ ، $\frac{ءص}{ءس} = ٢$ ، $ءس = \frac{ءص}{٢}$

نعوض في التكامل $\int (٢س - ٣)^{٢}\, ءس = \int ص^{٢}\, \frac{ءص}{٢}$

$$= \frac{١}{٢} \times \frac{ص^{٣}}{٣} + جـ = \frac{ص^{٣}}{٦} + جـ = \frac{(٢س - ٣)^{٣}}{٦} + جـ$$

$$\int_{١}^{٢} (٢س - ٣)^{٢}\, ءس = \left| \frac{(٢س - ٣)^{٣}}{٦} \right|_{١}^{٢} = \frac{(٢ - ٣)^{٣}}{٦} - \frac{(٤ - ٣)^{٣}}{٦}$$

$$= \frac{١}{٦} + \frac{١}{٦} = \frac{٢}{٦} = \frac{١}{٣}$$

س٦: $\int_{٠}^{١} (٢س - ٥)(س^{٢} - ٥س + ٧)^{-٢}\, ءس$

نجد التكامل غير المحدود $\int (٢س - ٥)(س^{٢} - ٥س + ٧)^{-٢}\, ءس$

شركة الرائد للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبدالرحمن شقير
00970568-952714

نفرض ص = س^{٢} − ٥س + ٧ ، $\frac{د ص}{د س}$ = ٢س − ٥ ، د س = $\frac{د ص}{(٢س - ٥)}$

نعوض في التكامل $\int (٢س - ٥)(س^{٢} - ٥س + ٧)^{-٢}$ د س

$= \int (٢س - ٥) ص^{-٢} \frac{د ص}{(٢س - ٥)} = \int ص^{-٢}$ د ص $= -ص^{-١} + ج$

$= -(س^{٢} - ٥س + ٧)^{-١} + ج$

ومن ذلك $\int_{٠}^{١} (٢س - ٥)(س^{٢} - ٥س + ٧)^{-٢}$ د س $= -(س^{٢} - ٥س + ٧)^{-١}\Big|_{٠}^{١}$

$= -(-١ + ٥ + ٧)^{-١} + (٧)^{-١}$ ، $= \frac{١}{٧} + \frac{-١}{٣} = \frac{-٣ + ٧}{٢١} = \frac{-٤}{٢١}$

س٧: $\int \sqrt{٣س - ١}$ د س $= \int (٣س - ١)^{\frac{١}{٢}}$ د س

نفرض ص = ٣س − ١ ، $\frac{د ص}{د س}$ = ٣ ، د س = $\frac{د ص}{٣}$

نعوض في التكامل $= \int (٣س - ١)^{\frac{١}{٢}}$ د س $= \int ص^{\frac{١}{٢}} \frac{د ص}{٣} = \frac{١}{٣} \times \frac{٢ ص^{\frac{٣}{٢}}}{٣} + ج$

$= \frac{٢ ص^{\frac{٣}{٢}}}{٩} + ج = \frac{٢(٣س - ١)^{\frac{٣}{٢}}}{٩} + ج$

س٨: $= \int (س + ٢) \sqrt[٣]{س^{٢} + ٤س}$ د س

نفرض ص = س^{٢} + ٤س

$\frac{د ص}{د س}$ = ٢س + ٤ ، د س = $\frac{د ص}{(٢س + ٤)}$ $\frac{د ص}{٢(س + ٢)}$ = د س

نعوض في التكامل

$\int (س + ٢) \sqrt[٣]{س^{٢} + ٤س}$ د س $= \int (س + ٢) ص^{\frac{١}{٣}} \frac{د ص}{٢(س + ٢)}$

$= \frac{١}{٢} \int ص^{\frac{١}{٣}}$ د ص $= \frac{٣}{٨} ص^{\frac{٤}{٣}} + ج$

$= \frac{٣}{٨} (س^{٢} + ٤س)^{\frac{٤}{٣}} + ج$

شركة الرائد للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبدالرحمن شقير
00970568-952714

س١: المساحة المطلوبة $= \int_{-١}^{٣} هـ(س)\,ءس = \int_{-١}^{٣} ٣\,ءس = ٣(٣ - (-١)) = ١٢$ وحدة مساحة.

س٢: المساحة المطلوبة $= \int_{١}^{٣} هـ(س)\,ءس = \int_{١}^{٣} (٣س - ٢)\,ءس$

$$= \left[\frac{٣س^{٢}}{٢} - ٢س\right]_{١}^{٣} = (٦ - \frac{٢٧}{٢}) - (٢ - \frac{٣}{٢})$$

$= ٨$ وحدات مساحة.

س٣: المساحة المطلوبة $= \int_{٠}^{١} هـ(س)\,ءس = \int_{٠}^{١} س^{٣}\,ءس = \left[\frac{س^{٤}}{٤}\right]_{٠}^{١} = \frac{١}{٤}$ وحدة مساحة.

س٤: المساحة المطلوبة $= \int_{١}^{٥} هـ(س)\,ءس = \int_{١}^{٥} أس\,ءس$

$$= \left[\frac{أس^{٢}}{٢}\right]_{١}^{٥} = \frac{أ٢٥}{٢} - \frac{أ}{٢} = ١٢أ = ٨ \quad \text{ومنها} \quad أ = \frac{٢}{٣}$$

س٥: المساحة المطلوبة $= \int_{٠}^{٩} \sqrt{٣س + ٩}\,ءس = \int_{٠}^{٩} (٣س + ٩)^{\frac{١}{٢}}\,ءس$

نجد التكامل غير المحدود $= \int (٣س + ٩)^{\frac{١}{٢}}\,ءس$

نفرض ص $= ٣س + ٩$ ، $\frac{ءص}{ءس} = ٣$ ، $ءس = \frac{ءص}{٣}$

نعوض في التكامل $= \int (٣س + ٩)^{\frac{١}{٢}}\,ءس = \int ص^{\frac{١}{٢}}\,\frac{ءص}{٣}$

$$= \frac{١}{٣} \times \frac{٢ص^{\frac{٣}{٢}}}{٣} + جـ = \frac{٢ص^{\frac{٣}{٢}}}{٩} + جـ = \frac{٢(٣س + ٩)^{\frac{٣}{٢}}}{٩} + جـ$$

المساحة المطلوبة $= \left[\frac{٢(٣س + ٩)^{\frac{٣}{٢}}}{٩}\right]_{٠}^{٩} = ٤٢$ وحدة مساحة

شركة الرائد للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبدالرحمن شقير
00970568-952714

حلول تمارين عامة ٤ ـ ٨

س١:

الفقرة	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
الإجابة	ج	أ	ب	د	أ	أ	ج	د	أ	ج

س٢: $\text{و}(س) = \int \text{و}'(س)\,د س = \int (٤س^{٣} + س^{٢} - ٢س)\,د س$

$= س^{٤} + \frac{س^{٣}}{٣} - س^{٢} + جـ$

لكن $\text{و}(٠) = ٣ = جـ$ ، منها $\text{و}(س) = س^{٤} + \frac{س^{٣}}{٣} - س^{٢} + ٣$

$\text{و}(١) = ١ + \frac{١}{٣} - ١ + ٣ = \frac{١٠}{٣}$

س٣: $\text{و}(س) = \int \text{و}'(س)\,د س = \int (٣ - ٢س)\,د س$

$= ٣س - س^{٢} + جـ$

$\text{و}(س)$ يمر بالنقطة $(١ ، ٦)$، $\text{و}(١) = ٦$

$\text{و}(١) = ٦ = ٣ - ١ + جـ$ ، ومنها $جـ = ٤$

$\text{و}(س) = ٣س - س^{٢} + ٤$

س٤: $\int_{١}^{١} (٢\text{و}(س) - ٥\text{هـ}(س) + ٢)\,د س = \int_{٣}^{١} ٢\text{و}(س)\,د س - \int_{٣}^{١} ٥\text{هـ}(س)\,د س + \int_{٣}^{١} ٢\,د س$

$= ٢\int_{٣}^{١} \text{و}(س)\,د س - ٥\int_{٣}^{١} \text{هـ}(س)\,د س + \int_{٣}^{١} ٢\,د س$

$= ٢ \times -٧ - ٥ \times ٤ - ٤ = -٣٨$

س٥: $\int (٢س + ١)\sqrt[٣]{(س^{٢} + س + ٤)^{٢}}\,د س = \int (٢س + ١)(س^{٢} + س + ٤)^{\frac{٢}{٣}}\,د س$

نفرض $ص = س^{٢} + س + ٤$ ، $\frac{د ص}{د س} = ٢س + ١$ ، $د س = \frac{د ص}{٢س + ١}$

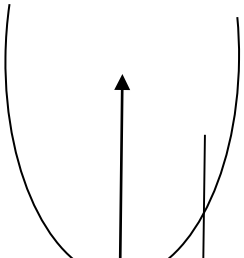
نعوض في التكامل $= \int (٢س + ١)(س^{٢} + س + ٤)^{\frac{٢}{٣}}\,د س$

$= \int (٢س + ١) ص^{\frac{٢}{٣}} \frac{د ص}{(٢س + ١)}$

$= \int ص^{\frac{٢}{٣}}\,د ص = \frac{٣ص^{\frac{٥}{٣}}}{٥} + جـ$

$= \frac{٣(س^{٢} + س + ٤)^{\frac{٥}{٣}}}{٥} + جـ$

السؤال السادس:



المساحة المطلوبة $= \int_{\text{ب}}^{\text{أ}} \text{ق}(س)\,\text{د}س = \int_{\text{ب}}^{\text{أ}} (س^{٢} + ٥)\,\text{د}س$

$= \left[\frac{س^{٣}}{٣} + ٥س\right]_{\text{ب}}^{\text{أ}}$

$= (١٠ + \frac{٨}{٣}) - (٠)$ ٢

$= \frac{٣٨}{٣}$ وحدة مساحة.

الوحدة الخامسة

الرياضيات المالية

تمارين ومسائل (٥ - ١)

س١:

أ) $ف = م \times ع \times ن = ١٣٨٠٠ \times ٠٫٠٤ \times \frac{١٠}{١٢}$

$= ٤٦٠$ ديناراً.

ب) $ج = م + ف = ١٣٨٠٠ + ٤٦٠ = ١٤٢٦٠$ ديناراً

س٢: $ج = م + ف = م + م \times ع \times ن = م(١ + ع \times ن)$

$٥٦٠٠ = م(١ + ٠٫٠٥ \times ٨) = ١٫٤ م$

$م = \frac{٥٦٠٠}{١٫٤} = ٤٠٠٠$ دينارا.

س٣: $ف = م \times ع \times ن$

$٨٠٠ = ٢٤٠٠٠ \times ٠٫٠٨ \times ن$

$٨٠٠ = ١٩٢٠ ن$

ومنها $ن = \frac{٨٠٠}{١٩٢٠} = \frac{٥}{١٢}$، عدد الأشهر = ٥ أشهر، ويمكن الحل بطرق أخرى.

س٤: $ف = م \times ع \times ن = ١٢٠٠٠ \times ١١٫٠ \times ٣ = ٣٩٦٠$ ديناراً

$ج = م + ف = ١٢٠٠٠ + ٣٩٦٠ = ١٥٩٦٠$ ديناراً.

س٥: أ) $ف = م \times ع \times ن = ١٢٠٠٠ \times ٠٫٠٣ \times \frac{٣}{١٢} = ٩٠$ دينارا.

ب) $ف = م \times ع \times ن$

$٢١٦٠ = ١٢٠٠٠ \times ٠٫٠٣ \times ن$

$ن = \frac{٢١٦٠}{٣٦٠} = ٦$ سنوات

س٦: $ف = م \times ع \times ن = ٨٠٠٠ \times ١٢ \times ٠٫٠١ \times \frac{٢٤٠}{٣٦٠} = ٦٤٠$ دينارا.

$\overline{ف} = م \times ع \times ن = ٨٠٠٠ \times ١٢ \times ٠٫٠١ \times \frac{٢٤٠}{٣٦٥} = ٦٣١٫٢٣٢$ دينارا

س٧: $ف = م \times ع \times ن$

$٤٢٠ = ١٢٠٠٠ \times ع \times \frac{٧}{١٢}$

$ع = \frac{٤٢٠}{٧٠٠٠} = ٠٫٠٦$ ، $ع = ٦٪$

تمارين ومسائل (٥-٢)

س١: جـ = م(١+ع)^{ن} = ٨٠٠٠(١+٠٫٠٩)^{٦} = ٨٠٠٠×١٫٦٧٧ = ١٣٤١٦ ديناراً

س٢: جـ = م(١+ع)^{ن}

$$٥٠٠٠\left(١+\frac{٧,٥}{١٠٠}\right)^{ن} = ٧١٧٨,١٤٦٦$$

$$(١,٠٧٥)^{ن} = \frac{٧١٧٨,١٤٦٦}{٥٠٠٠}$$

$$(١,٠٧٥)^{ن} = ١,٤٣٥$$

$$ن \text{ لـو}(١,٠٧٥) = \text{لـو}(١,٠٧٥)^{ن} \quad \text{لـو}١,٤٣٥ =$$

$$ن = \frac{\text{لـو}١,٤٣٥}{\text{لـو}(١,٠٧٥)}$$

$$ن = \frac{٠٫١٥٦}{٠٫٠٣١} = ٥ \text{ سنوات.}$$

س٣: جـ = م+ف = ٤٠٠٠٠+١٥٦٥٧٫٨٥ = ٥٥٦٥٧٫٨٥

جـ = م(١+ع)^{ن}

٥٥٦٥٧٫٨٥ = ٤٠٠٠٠(١+ع)^{٨}

(١+ع)^{٨} = ١٫٣٩١

١+ع = $\sqrt[٨]{١٫٣٩١}$

ع = ٢٫٤٪ ووضحنا ٠٫٤٢١

س٤: جـ = م$\left(١+\frac{ع}{ر}\right)^{ن\times ر}$ = ١٥٠٠٠$\left(١+\frac{٠٫٠٧}{٢}\right)^{٥\times٢}$

= ١٥٠٠٠(١+٠٫٠٣٥)^{١٠} = ١٥٠٠٠×١٫٤١١ = ٢١١٦٥

جـ = م + ف

٢١١٦٥ = ١٥٠٠٠ + ف

ف = ٦١٦٥ ديناراً.

س٥: جـ = م(١+ع)^{ن}

شركة الرائد للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبدالرحمن شقير
00970568-952714

$$٨٠٠٠ (١ + ٠,٠٨)^{ن} = ١٤٨٠٧,٤٤$$

$$(١ + ٠,٠٨)^{ن} = \frac{١٤٨٠٧,٤٤}{٨٠٠٠}$$

$$(١ + ٠,٠٨)^{ن} = ١,٨٥٠$$

$$\text{لـو}(١ + ٠,٠٨)^{ن} = \text{لـو}١,٨٥٠ \quad \Leftarrow \quad ن \text{لـو}(١ + ٠,٠٨)$$

$$ن = \frac{\text{لـو}١,٨٥٠}{\text{لـو}١,٠٨} = \frac{٠,٢٦٧}{٠,٠٣٣} \text{ سنوات}$$

س٦: $ن = ٣ \times ٤ = ١٢$

ا $جـ = م(١ + ع)^{ن} \quad ٥٠٠٠ (١ + ٠,٠٣)^{١٢} = ٥٠٠٠ (١,٠٣)^{١٢} = ٧١٢٥$ دينار

حلول تمارين ومسائل ٥-٣

س١: $ف = أ \times ع = ٤٥٠٠ \times ٠,٠٧ = ٣١٥$ ديناراً

$$ق(ع) = ف \times \left[\frac{١ - \frac{١}{(١ + ع)^{ن}}}{ع} \right] + \frac{أ}{(١ + ع)^{ن}}$$

$$= ٣١٥ \times \left[\frac{١ - \frac{١}{(١ + ٠,٠٧)^{٥}}}{٠,٠٧} \right] + \frac{٤٥٠٠}{(١ + ٠,٠٧)^{٥}}$$

$$= ٣١٥ \times \left[\frac{١ - \frac{١}{١,٤٠٢}}{٠,٠٧} \right] + \frac{٤٥٠٠}{١,٤٠٢}$$

$$= ٣١٥ \times \left[\frac{١ - ٠,٧١٣}{٠,٠٧} \right] + ٣٢٠٩,٧ = ٣١٥ \times ٤,١ + ٣٢٠٩,٧$$

$$= ١٢٩١,٥ + ٣٢٠٩,٧ = ٤٥٠١,٢ \text{ ديناراً}$$

س٢: $ف = أ \times ع = ١٥٠٠ \times ٠,٠٧ = ١٠٥$

$$\text{قـ}(ع) = ف \times \left[\frac{\frac{1}{(1+\bar{ع})^{ن}} - 1}{\bar{ع}}\right] + \frac{أ}{(1+\bar{ع})^{ن}}$$

$$= ١٠٥ \times \left[\frac{\frac{1}{(١+٠,٠٦)^{٥}} - 1}{٠,٠٦}\right] + \frac{١٥٠٠}{(١+٠,٠٦)^{٥}}$$

$$= ١٠٥ \times \left[\frac{\frac{1}{١,٣٣٨} - 1}{٠,٠٦}\right] + \frac{١٥٠٠}{١,٣٣٨}$$

$$= ١٠٥ \times \left[\frac{٠,٧٤٧ - 1}{٠,٠٦}\right] + ١١٢٠,٨٩٢ \quad = ١٠٥ \times ٤,٢٢ + ١١٢٠,٨٩٢$$

$$= ٤٤٣,١ + ١١٢٠,٨٩٢ = ١٥٦٣,٦٤٢ \text{ دينارا}$$

س٣: $ف = أ \times ع = ٣٦٠٠ \times \frac{٦}{١٠٠} = ٢١٦$

$$\text{قـ}(ع) = ٢١٦ \times \left[\frac{\frac{1}{(١+٠,٠٩)^{٨}} - 1}{٠,٠٩}\right] + \frac{٣٦٠٠}{(١+٠,٠٩)^{٨}}$$

$$= ٢١٦ \times \left[\frac{\frac{1}{١,٩٩٢} - 1}{٠,٠٩}\right] + \frac{٣٦٠٠}{١,٩٩٢}$$

$$= ٢١٦ \times \left[\frac{٠,٥٠٢ - 1}{٠,٠٩}\right] + ١٨٠٧,٢٢٨$$

$$= ٢١٦ \times \left[\frac{٠,٤٩٨}{٠,٠٩}\right] + ١٨٠٧,٢٢٨$$

$$= ١١٩٥,١٢٨ + ١٨٠٧,٢٢٨ = ٣٠٠٢,٣٥٦ \text{ ديناراً}$$

س٤: $\text{ف} = \text{أ} \times \frac{٧}{١٠٠}$

$$\text{هـ}(\bar{ع}) = \text{ف} \times \frac{\text{أ}}{(١ + \bar{ع})^{٢}} + \left[\frac{١ - \frac{١}{(١ + \bar{ع})^{٢}}}{\bar{ع}}\right]$$

$$١٧٠٠ = \text{ف} \times \frac{\text{أ}}{(١ + ٠,٠٧)^{٣}} + \left[\frac{١ - \frac{١}{(١ + ٠,٠٧)^{٣}}}{٠,٠٧}\right]$$

$$١٧٠٠ = (\text{أ} \times ٠,٠٧) \times \left[\frac{١ - \frac{١}{١,٢٢٥}}{٠,٠٧}\right] + \frac{\text{أ}}{١,٢٢٥}$$

$$١٧٠٠ = (\text{أ} \times ٠,٠٧) \times \left[\frac{١ - ٠,٨١٦}{٠,٠٧}\right] + \frac{\text{أ}}{١,٢٢٥}$$

$$١٧٠٠ = (\text{أ} \times ٠,٠٧) \times ٢,٦٢٨ + \frac{\text{أ}}{١,٢٢٥}$$

$$١٧٠٠ = \text{أ}(٠,١٨٣٩٦) + \frac{\text{أ}}{١,٢٢٥}$$

$$٢٠٨٢,٥ = \text{أ} + \text{أ}٠,٢٢٥$$

$$٢٠٨٢,٥ = \text{أ}\ ١,٢٢٥$$

$$\text{أ} = \frac{٢٠٨٢,٥}{١,٢٢٥}$$

$$= ١٧٠٠ \text{ ديناراً}$$

شركة الراتب للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبدالرحمن شقير
00970568-952714

س٥: ف = أ × ع = ٤٠٠٠ × ع

$$\text{قـ}(\bar{ع}) = \text{ف} \times \left[\frac{\frac{1}{(1+\bar{ع})^{\text{ن}}} - 1}{\bar{ع}} \right] + \frac{\text{أ}}{(1+\bar{ع})^{\text{ن}}}$$

$$٧٤٨٤,٤٧٢ = \text{ف} \times \left[\frac{\frac{1}{(1+٠,١٠)^{٥}} - 1}{٠,١٠} \right] + \frac{٤٠٠٠}{(1+٠,١٠)^{٥}}$$

$$٧٤٨٤,٤٧٢ = \text{ف} \times \left[\frac{\frac{1}{١,٦١٠} - 1}{٠,١٠} \right] + \frac{٤٠٠٠}{١,٦١٠}$$

$$٧٤٨٤,٤٧٢ = \text{ف} \times \left[\frac{٠,٦٢١ - 1}{٠,١٠} \right] + ٢٤٨٤,٤٧٢$$

$$٧٤٨٤,٤٧٢ = \text{ف} \times ٣,٧٩ + ٢٤٨٤,٤٧٢$$

$$٥٠٠٠ = \text{ف} \times ٣,٧٩$$

ف = ٩,٢٦ ≈ ٩ أدوات

ف = أ × ع

= ٩,٢٦ × ٤٠٠٠ = ١٣١٩ × ع

ع = ٠,٣٣

شركة الراتب للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبدالرحمن شقير
00970568-952714

حلول تمارين ومسائل ٥-٤

س١: $\text{قـ}(\bar{ع}) = \frac{\text{أ} \times \text{ع}}{\bar{ع}} = \frac{٤٥٠٠ \times ٠,٠٨}{٠,٠٦} = \frac{٣٦٠}{٠,٠٦} = ٦٠$ دينار تقريباً

س٢: أ = ٣٠٠٠ ، ن = ١٢ × ٤ = ٤٨ ، ع = $\frac{٨٪}{٤}$ = ٢٪ ، $\bar{ع}$ = ٥٪

ف = ٣٠٠٠ × ٠,٠٢ = ٦٠

$$\text{هـ}(ع) = ف \times \left[\frac{\frac{1}{(1+\bar{ع})^{ن}} - 1}{\bar{ع}}\right] + \frac{أ}{(1+\bar{ع})^{ن}}$$

$$= ٦٠ \times \left[\frac{\frac{1}{(1+٠,٠٥)^{٤٨}} - 1}{٠,٠٥}\right] + \frac{٣٠٠٠}{(1+٠,٠٥)^{٤٨}}$$

$$= ٦٠ \times \left[\frac{\frac{1}{١٠,٤٠١} - 1}{٠,٠٥}\right] + \frac{٣٠٠٠}{١٠,٤٠١}$$

$$= ٦٠ \times \left[\frac{٠,٠٩٦ - 1}{٠,٠٥}\right] + ١٨٦١,٠٤٢$$

$$= ٦٠ \times ١٨,٠٨ + ١٨٦١,٠٤٢$$

$$= ١٠٨٤,٨ + ٨٤٢,٥ \text{ دينار}$$

س٣: $\text{ن}(ع) = \frac{أ \times ع}{\bar{ع}}$

$$٥١٤٢,٨٦ = \frac{٤٠٠٠ \times ٠,٠٩}{\bar{ع}}$$

$$\bar{ع} = \frac{٣٦٠}{٥١٤٢,٨٦}$$

$$\bar{ع} = ٧٪$$

س٤: $\text{ن}(ع) = \frac{أ \times ع}{\bar{ع}}$

$$\text{ن}(ع) = \frac{٣٠٠٠ \times ٠,١٢}{٠,١٢}$$

$$= ٣٠٠٠ \text{ دينار}$$

شركة الراتب للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبدالرحمن شقير
00970568-952714

حلول تمارين عامة ٥ـ٥

س١:

الفقرة	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
الإجابة	د	أ	ج	ب	ب	د	ج	ب	ج	أ

س٢: $ف = \frac{م \times ع \times ن}{٣٦٠} = \frac{١٢٠}{٣٦٠} \times ٠,١٢ \times ٨٠٠٠ =$ ديناراً

$\bar{ف} = \frac{م \times ع \times ن}{٣٦٠} = \frac{١٢٠}{٣٦٥} \times ٠,١٢ \times ٨٠٠٠ = ٦١٦,٦$ ديناراً

س٣: $ف = م \times ع \times ن$

$٨٤٠ = ٢٤٠٠٠ \times ع \times ٢$

$٨٤٠ = ٤٨٠٠٠ \times ع$

$ع = \frac{٨٤٠}{٤٨٠٠٠}$

$ع = ١,٧٥٪$

س٤: $ع = \frac{١٢٪}{١٢} = ١٪$ ، $ن = ٤ \times ١٢ = ٤٨$

$جـ = م(١ + ع)^{ن}$

$= ٥٠٠٠ \times (١ + ٠,٠١)^{٤٨}$

$= ٥٠٠٠ \times (١,٦١٢)$

$جـ = ٨٠٦٠$

$ف = جـ - م$

$= ٨٠٦٠ - ٥٠٠٠$

$ف = ٣٠٦٠$ ديناراً

س٥: $ع = \frac{٦٪}{٦} = ١٪$ $ن = ٣ \times ٦ = ١٨$

شركة الراتب للتفوق والإبداع الثقافي
د. عبدالرحمن شقير
00970568-952714

$$جـ = م(١ + ع)^{ن}$$

$$٧١٧٦,٨٨ = م(١ + ٠,٠١)^{١٨}$$

$$٧١٧٦,٨٨ = م \times ١,١٩٦$$

$$م = \frac{٧١٧٦,٨٨}{١,١٩٦}$$

م = ٦٠٠٠ دينار أردني

س٦: و(ع) = $\frac{أ \times ع}{\bar{ع}}$ = $\frac{١٠٠٠ \times ٠,١}{٠,٠٩}$ = $\frac{١٠٠}{٠,٠٩}$ = ١١١ ديناراً