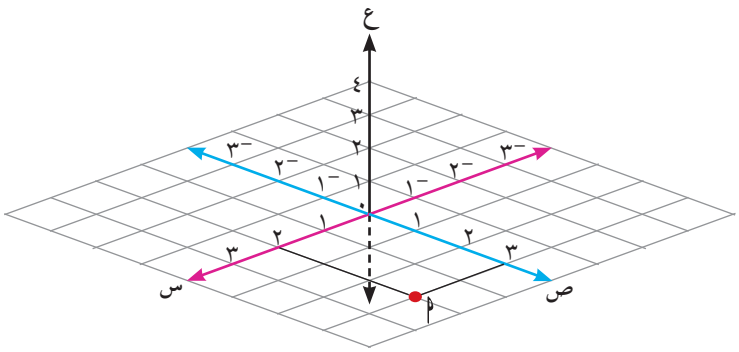
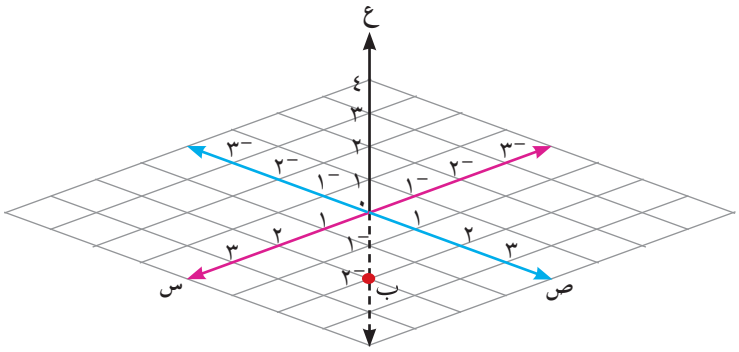
حلول أسئلة الكتاب

تمارين ومسائل: (١ - ١)

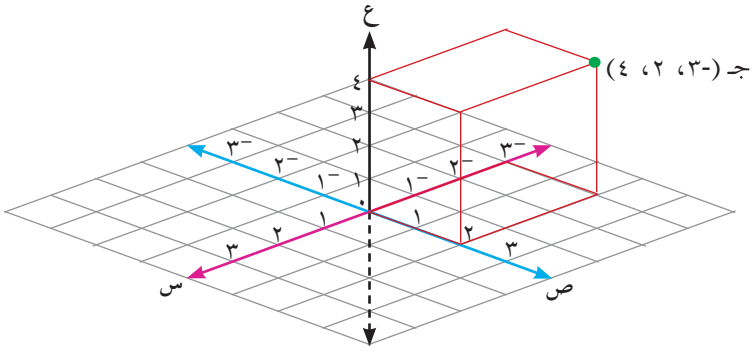
س١: يتم رسم النقاط في الفراغ النقطة أ (٢، ٣، ٠) تقع في مستوى س ص.



النقطة ب (٠، ٠، -٢) تقع على الجزء السالب من محور ع.



النقطة جـ (-٣، ٢، ٤) تقع في الفراغ (ملحوظة: يمكن استخدام برنامج جيوبرا في التمثيل).



س٢:

أ (١٠، ٢٢، ٤٠) جـ (١٣، ٢٩، ٤٥) ب (س، ص، ع)

١- $\frac{س + ١٠}{٢}$ = ١٣ ومنها: س = ١٦، $\frac{ص + ٢٢}{٢}$ = ٢٩ ومنها: ص= ٣٦

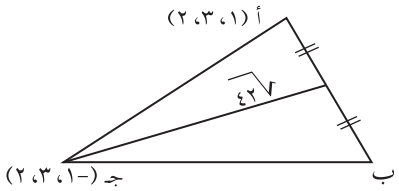
$\frac{ع + ٤٠}{٢}$ = ٤٥ ومنها: ع = ٥٠ ومنها: ب (١٦، ٣٦، ٥٠)

٢- $\overline{أب}$ = $\sqrt{(١٠-١٦)^٢ + (٢٢-٣٦)^٢ + (٥٠ - ٠)^٢}$ = $\sqrt{١٠٠ + ١٩٦ + ٣٦}$ = $\sqrt{٣٣٢}$ = ١٨,٢٢م

س٣: بُعد النقطة عن مستوى س ص = ٢ ؛أي أن: ع = ± ٢ ، وبُعدها عن س ع = ٧ ؛ أي أنّ:
ص = ± ٧ وبُعدها عن ص ع = ٣ ؛ أي أن: س = ± ٣ إذن: النقطة هي (±٣، ±٧، ±٢) وفي هذه الحالة توجد ٨ نقاط، وهي: (٣، ٧، ٢)، (٣، ٧، -٢)، (٣، -٧، ٢)، (٣، -٧، -٢)
(-٣، ٧، ٢)، (-٣، ٧، -٢)، (-٣، -٧، ٢)، (-٣، -٧، -٢)

ملحوظة: يمكن استخدام الشجرة لتحديد الحالات الممكنة.

س٤: (س + ١)^٢ + (-٥)^٢ + (س - ٤)^٢ = ٤٢



س^٢+٢س + ١ + ٢٥ + س^٢-٨س + ١٦ = ٤٢

٢س^٢ -٦س +٤٢= ٤٢

س^٢ - ٣س = ٠ إذن إمّا: س=٠ وترفض، أو: س=٣

إذن: د (٣، -٢، ١) لكن: أ (١، ٣، ٢)، ب (س ، ص ، ع)

$\frac{س + ١}{٢}$ = ٣ ⟸ س = ٥ ، $\frac{ص + ٣}{٢}$ = -٢ ⟸ ص = -٧ ، $\frac{ع + ٢}{٢}$ = ١ ⟸ ع = ٠ ؛إذن: ب (٥، -٧، ٠)

س٥: أ (س، ٠، ٠)، ب (٠، ص، ٠)، ج (٠، ٠، ع)

د (٢، -٤، ٠) منتصف أ ب ؛ إذن: $\frac{س + ٠}{٢}$ = ٢ ومنها: س = ٤ ، وكذلك:

$\frac{ص + ٠}{٢}$ = -٤ ومنها: ص = -٨ ، هـ منتصف ب جـ ،ومنها: $\frac{ع + ٠}{٢}$ = ٤ ومنها: ع = ٨

إذن: أ (٤، ٠، ٠)، ب (٠، -٨، ٠) ، ج (٠، ٠، ٨)
النقطة و هي منتصف ج أ = (٢، ٠، ٤)

س٦: ن ($\frac{٦+٨}{٢}$ ، $\frac{٤-+٠}{٢}$ ، ٠)= (٧، ٠، ٠)

(ن م)^٢ = (س - ٧)^٢ + $\frac{س^٢}{٤}$ + ٠ = $\frac{٤٩}{٤}$ بترتيب المعادلة ينتج:

٥ س^٢ - ٥٦ س+ ١٤٧ = ٠ ومنها: (٥ س - ٢١) (س - ٧) = ٠ ومنها:

س = $\frac{٢١}{٥}$ تهمل، أو: س = ٧ ومنها: م (٧، −٥، ٣، ٠)

(م جـ)^{٢} = (٧ − ٤)^{٢} + (−٥، ٣ + ٢)^{٢} + ٠ = $\frac{٩}{٤}$ + ٩ = $\frac{٤٥}{٤}$ ومنها: م جـ = ٣ = $\frac{٣\sqrt{٥}}{٢}$ = ٣ م أ

(م أ)^{٢} = ١ + $\frac{١}{٤}$ + ٠ = $\frac{٥}{٤}$ ومنها: م أ = $\frac{\sqrt{٥}}{٢}$

∴ $\overline{\text{م جـ}}$ = ٣ $\overline{\text{م أ}}$ وهو المطلوب

تمارين ومسائل: (١ - ٢)

س١: أ) $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ = ب − أ = (٤، ٢) = ٤ و$_{١}$ + ٢ و$_{٢}$

$\overleftarrow{\text{أ جـ}}$ = جـ − أ = (٦، ٠) = ٦ و$_{١}$ + ٠ و$_{٢}$ = ٦ و$_{١}$

ب) |$\overleftarrow{\text{أ ب}}$| = $\sqrt{٤^{٢} + ٢^{٢}}$ = $\sqrt{٢٠}$ وحدة

|$\overleftarrow{\text{أ جـ}}$| = ٦ وحدات

س٢: ٢س + ٣ = ص

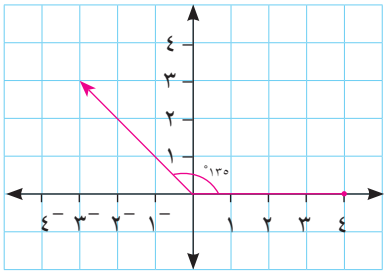
ص-٢ = س + ٣ نعوض المعادلة الأولى في الثانية وينتج: (٢س + ٣) − ٢ = س + ٣ وينتج: س = ٢ بالتعويض بقيمة س ينتج: ص = ٢ × ٢ + ٣ =٧

س٣: أ) محيط الدائرة = ٢ × ١٤ × π = ٢٨ π، والمطلوب بالمسافة نصفها فقط.

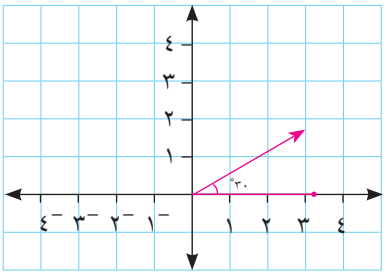
المسافة الكلية = ٢٠ + ١٤ π = ٢٠ + (٤٠ + ١٤ π) متر

ب) الإزاحة الكلية = ٢٠ + ١٤ + ١٤ + ٢٠ = ٦٨م شرقاً

س٤: الحل: ظا هـ$_{١}$ = −١ ومنها: هـ$_{١}$ = ١٣٥



ظا هـ$_{2}$ = $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ومنها: هـ$_{2}$ = ٣٠



قياس الزاوية بين المتجهين = ١٣٥ −٣٠ = ١٠٥

س٥: تحركت نقطة من النقطة: أ (-٣، ٥) إلى النقطة: ب (٠، ٨)، ثم تحركت إلى النقطة: جـ (س، ٢)
حيث: س > ٠ ، فإذا كانت المسافة الكلية التي قطعتها تساوي ٩ $\sqrt{2}$. جد إزاحة هذه النقطة مقداراً واتجاهاً.

الحل: ف = أب + ب جـ

$\sqrt{18} + \sqrt{س^{2}+36} = 9\sqrt{2}$

$3\sqrt{2} + \sqrt{س^{2}+36} = 9\sqrt{2}$

$\sqrt{س^{2}+36} = 6\sqrt{2}$ (بتربيع الطرفين)

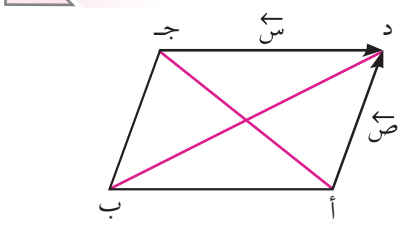
س٢ + ٣٦ = ٧٢ ومنها: س = ٦ ، -٦ (-٦ تهمل)

جـ (٦ ، ٢)

الإزاحة $\overleftarrow{ع}$ = جـ − أ = (٩ , -٣)

$|\overleftarrow{ع}| = \sqrt{90}$ والاتجاه ظاهـ = $\frac{1}{3}$ (حيث هـ قياس الزاوية مع الاتجاه الموجب لمحور السينات)، ومنها: هـ تساوي تقريبا ١٩ درجة.

تمارين ومسائل: (١ - ٣) العمليات على المتجهات



س١: أ) $\overleftarrow{أجـ} = \overleftarrow{أب} + \overleftarrow{بجـ} = -س + ص$

ب) $\overleftarrow{دب} = \overleftarrow{دجـ} + \overleftarrow{جب} = -(س + ص)$

س٢: -٥ (-٣، ٥) + ٢(٣، ٤) = (١٥، -٢٥) + (٦، ٨) = (٢١، -١٧)

س٣: نكتب المتجهات بالوضع القياسي

$\overleftarrow{أب} = (٥، ٠)$، $\overleftarrow{ءجـ} = (٥، ٠)$؛ لأنّ: $\overleftarrow{أب} = \overleftarrow{ءجـ}$، إذن: تساوى وتوازى ضلعان متقابلان في شكل رباعي؛ لذلك الشكل هو متوازي أضلاع.

س٤: $|\overleftarrow{أب}|^{٢} = (س-٥)^{٢} + (-٢-س)^{٢} \Longleftarrow ٢٥ = س^{٢}-١٠س + ٢٥ + ٤ + ٤س + س^{٢}$

ومنها: $٢س^{٢}-٦س + ٤ = ٠ \Longleftarrow س^{٢}-٣س + ٢ = ٠$

$(س - ١)(س - ٢) = ٠ \Longleftarrow س = ١ ، س = ٢$

س٥: $٤\overleftarrow{س} - ٢\overleftarrow{أ} = ٣\overleftarrow{ب}$ وبالتعويض: $٤\overleftarrow{س} - ٢(٣، -٥) = ٣(٢، -٦)$

$٤\overleftarrow{س} = (٦، -١٨) + (٦، -١٠) \Longleftarrow ٤\overleftarrow{س} = (١٢، -٢٨) \Longleftarrow \overleftarrow{س} = (٣، -٧)$

س٦: $\overleftarrow{ن_{١}} + \overleftarrow{ن_{٢}} = (٥، ٧)$

$(٢، ٤) + \overleftarrow{ن_{٢}} = (٥، ٧)$ ومنها: $\overleftarrow{ن_{٢}} = (٣، ٣) = ٣و_{١} + ٣و_{٢}$

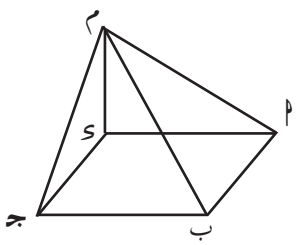
س٧: أ) متجه طوله ٥ وحدات وعكس $\overleftarrow{أ} = -٥ \times \frac{(-٢، ٦)}{\sqrt{٣٦ + ٤}} = (\frac{١٠}{\sqrt{٤٠}}، \frac{-٣٠}{\sqrt{٤٠}})$

ب) ٥ أمثال المتجه أ وباتجاه $\overleftarrow{أ}$ هو ٥(-٢، ٦) = (-١٠، ٣٠)

س٨: $\overleftarrow{أء} = \overleftarrow{أم} + \overleftarrow{ءم}$

أيضاً: $\overleftarrow{ب جـ} = \overleftarrow{أء} = \overleftarrow{ب م} + \overleftarrow{م جـ}$

نجمع المعادلتين وينتج: $٢\overleftarrow{أء} = \overleftarrow{أم} + \overleftarrow{ءم} + \overleftarrow{ب م} + \overleftarrow{م جـ}$ ، وهو المطلوب.



س١: $\overleftarrow{ق_1} + \overleftarrow{ق_2} = (١، ٢، ٦) = و_1 + ٢ و_2 + ٦ و_3$

س٢: أ (-٦، ٢، ٣)، ب (٢، ٤، ٨)

أ) $\pm ٤ \overleftarrow{أب} = \pm ٤(٨، ٢، ٥)$

ب) $٤ \frac{\overleftarrow{أب}}{|\overleftarrow{أب}|} = (\frac{٣٢}{\sqrt{٩٣}}، \frac{٨}{\sqrt{٩٣}}، \frac{٢٠}{\sqrt{٩٣}})$

ج) متجه وحدة عكس اتجاه $\overleftarrow{أب} = -\frac{\overleftarrow{أب}}{|\overleftarrow{أب}|} = -(\frac{٨}{\sqrt{٩٣}}، \frac{٢}{\sqrt{٩٣}}، \frac{٥}{\sqrt{٩٣}})$

س٣: إذا كان: $\overleftarrow{أ} = (-٢، ٤، ٦)$ وكان: $٢\overleftarrow{أ} + ٣\overleftarrow{ب} = ٢ و_1 + ٢٣ و_3$ جد $\overleftarrow{ب}$

$٣\overleftarrow{ب} = (٢، ٢٣، ٠) - (-٤، ٨، ١٢) = (٦، ١٥، -١٢)$، ومنها:

$\overleftarrow{ب} = (٢، ٥، -٤) = ٢ و_1 + ٥ و_2 - ٤ و_3$

س٤: $٣\overleftarrow{أ} + ٣\overleftarrow{ب} = (-٦، ١٢، ٣)$

$٢\overleftarrow{أ} - ٣\overleftarrow{ب} = (-٧، -١، -١٣)$

بحل المعادلتين ينتج: $\overleftarrow{أ} = (\frac{-١٣}{٥}، \frac{١١}{٥}، ٢)$، ومنها: $\overleftarrow{ب} = (\frac{٣}{٥}، \frac{٩}{٥}، ٣)$ ومنها:

$\overleftarrow{أ} - \overleftarrow{ب} = (\frac{-١٩}{٥}، \frac{٢}{٥}، -٥)$، ومنها $|\overleftarrow{أ} - \overleftarrow{ب}| = \sqrt{٣٥,٤}$

س٥: الحل: $٢\overleftarrow{أ} + ٣\overleftarrow{ب} = (٢م + ٣ن، -٤م + ٦ن، ٨)$

يتضمن : $٢م + ٣ن = ١٩$ ..... (١)

$-٤م + ٦ن = -٢$ ..... (٢)

وعند حل النظام السابق ينتج أن: $م = ٥$، $ن = ٣$

س٦: ليكن: $\overleftarrow{أ} = (١، -٣، ٢)$، $\overleftarrow{ب} = (س+٣، -س، ٢س- ٣)$ أجد قيمة / قيم س بحيث إنّ: $|\overleftarrow{أ} + \overleftarrow{ب}| = \sqrt{٢٢}$ وحدة طول.

الحل: $\overleftarrow{أ} + \overleftarrow{ب} = (١ + س + ٣، -٣ + -س، ٢ + ٢س - ٣)$

$\overleftarrow{أ} + \overleftarrow{ب} = (٤ + س، -٣ + -س، -١ + ٢س)$

$|\overleftarrow{أ} + \overleftarrow{ب}| = \sqrt{(٤+س)^٢ + (-٣-س)^٢ + (-١+٢س)^٢}$

$\sqrt{٢٢} = \sqrt{س^٢ + ٨س + ١٦ + س^٢ + ٦س + ٩ + ٤س^٢ - ٤س + ١}$

$٢٢ = ٦س^٢ + ١٠س + ٢٦$

$٣س^٢ + ٥س + ١٣ = ١١$

$٣س^٢ + ٥س + ١٣ = ١١$

$٣س^٢ + ٥س + ٢ = ٠$

$(٣س + ٢)(س + ١) = ٠$

$س = \frac{-٢}{٣}$، $س = -١$

تمارين ومسائل: (١ - ٥)

س١: أ) (٥، ٣، ٠) (-١، ٢، ٢) = -٥ + ٦ + ٠ = ١

ب) $\overleftarrow{ق_١}$. $\overleftarrow{ق_٢}$ = صفر متعامدان

س٢: (١، ٤، ٣)، (٣، ١٢، ٩)

(٣، ١٢، ٩) = ٣ (١، ٤، ٣) إذن: المتجهان متوازيان وبالاتجاه نفسه هـ = صفر°

(ملحوظة: يمكن الحل عن طريق قانون الزاوية بين متجهين).

س٣: أ) إذا كان $\overleftarrow{أ}$ = (س ، $\sqrt{٣}$)، $\overleftarrow{ب}$ = (-س ، $\sqrt{٣}$) وقياس الزاوية بينهما ٦٠°

جتا٦٠° = $\frac{-س^٢ + ٣}{\sqrt{س^٢ + ٣} \times \sqrt{س^٢ + ٣}} = \frac{١}{٢}$ وبترتيب المعادلة ينتج: س = ± ١

ب) (جتاس، -جاس) × (جتاس، ١+جاس) = .

جتا٢س– جاس – جا٢س = . ومنها ١- جا٢س- جاس – جا٢س = ١- جاس - ٢جا٢س=.

(١ – ٢جاس) (١+ جاس) = . ∴ جاس= $\frac{١}{٢}$ او جاس = -١ ومنها: س= ٣٠° أو ١٥٠°

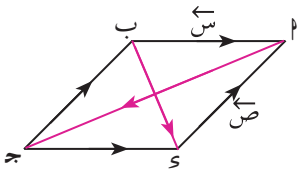
أو س = ٢٧٠° ترفض ، إذن: س = $\frac{\pi}{٦}$ او ٥ $\frac{\pi}{٦}$

س٤: $\text{جتا}^2 \frac{\pi}{٤} + \text{جتا}^2 \frac{\pi}{٣} + \text{جتا}^2 \theta_٣ = ١$ ومنها: $\frac{١}{٢} + \frac{١}{٤} + \text{جتا}^2 \theta_٣ = ١$

$\text{جتا}^2 \theta_٣ = \frac{١}{٤}$ ومنها: $\text{جتا}\, \theta_٣ = \pm \frac{١}{٢}$

ومنها: $\theta_٣ = \frac{\pi}{٣}$

س٥: أثبت باستخدام المتجهات أنّ قطري المعين متعامدان.



$|\overleftarrow{\text{س}}| = |\overleftarrow{\text{ص}}|$ أضلاع المعين متساوية في الطول.

المطلوب: إثبات أنّ: $\overleftarrow{\text{جأ}}$ عمودي على $\overleftarrow{\text{د ب}}$

$\overleftarrow{\text{جأ}} = (\overleftarrow{\text{س}} + \overleftarrow{\text{ص}})$، $\overleftarrow{\text{ب د}} = (\overleftarrow{\text{س}} - \overleftarrow{\text{ص}})$

$\overleftarrow{\text{جأ}} . \overleftarrow{\text{د ب}} = (\overleftarrow{\text{س}} + \overleftarrow{\text{ص}}) . (\overleftarrow{\text{س}} - \overleftarrow{\text{ص}}) = \overleftarrow{\text{س}} . \overleftarrow{\text{ص}} - |\overleftarrow{\text{س}}|^2 + |\overleftarrow{\text{ص}}|^2 - \overleftarrow{\text{س}} . \overleftarrow{\text{ص}} = ٠$.

∴ القطران متعامدان

س٦: إذا كان: أ يعامد ب ، وكان: أ يعامد جـ أثبت أنّ: أ يعامد د

حيث $\overleftarrow{\text{د}} = \text{ك}_١ \overleftarrow{\text{ب}} + \text{ك}_٢ \overleftarrow{\text{جـ}}$ ، $\text{ك}_١, \text{ك}_٢ \in$ ع*

الحل: $\overleftarrow{\text{أ}} . \overleftarrow{\text{د}} = \overleftarrow{\text{أ}} . (\text{ك}_١ \overleftarrow{\text{ب}} + \text{ك}_٢ \overleftarrow{\text{جـ}}) = \text{ك}_١ \overleftarrow{\text{أ}} . \overleftarrow{\text{ب}} + \text{ك}_٢ \overleftarrow{\text{أ}} . \overleftarrow{\text{جـ}}$

$= \text{ك}_١ \overleftarrow{\text{أ}} . \overleftarrow{\text{ب}} + \text{ك}_٢ \overleftarrow{\text{أ}} \overleftarrow{\text{جـ}} = ٠$.

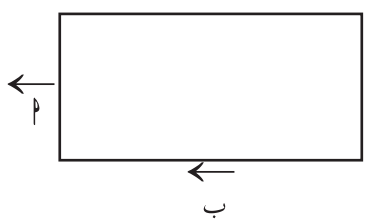
∴ المتجهان متعامدان.

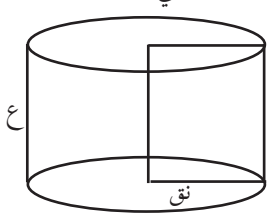
$\text{ش} = |\overleftarrow{\text{ق}}| \times |\overleftarrow{\text{ف}}| \times \text{جتا}\, ٥ = ٣ \times ٨ \times \frac{١}{\sqrt{٢}} = \frac{٢٤}{\sqrt{٢}}$

س٧: أ) $\theta = ٤٥°$ أو $\theta = ١٣٥°$

ب) $|٢ \overleftarrow{\text{أ}} + ٣ \overleftarrow{\text{ب}}| = \sqrt{١٩٢١}$ ويساوي تقريبًا ٤٤ وحدة.

س٨: أثبت باستخدام الضرب المتجهي أن المساحة الجانبية للاسطوانة = ٢ π نق ع





المساحة الجانبية للاسطوانة القائمة = مساحة المستطيل (الناتج من شبكة الإسطوانة)

$$= |\overleftarrow{أ}| \times |\overleftarrow{ب}| = |\overleftarrow{أ}| \times |\overleftarrow{ب}| \text{ جاهـ}$$

$$= ع \times 2\pi \text{ نق} \times \text{جا } ٩٠^\circ$$

$$= 2\pi \text{ نق ع}$$

تمارين ومسائل: (١ - ٦)

س١:

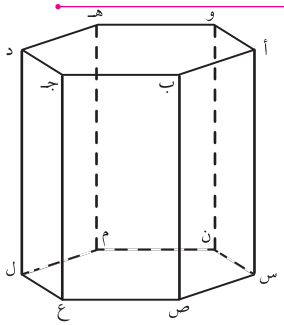
١	٢	٣	٤	٥
أ	أ	ج	ب	أ

س٢:

١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
صح	خطأ	خطأ	صح	خطأ	خطأ	خطأ	صح	خطأ

س٣: أ) عدد لا نهائي. ب) عدد لا نهائي. ج) واحد فقط.

س٤: ١- مستقيمان متوازيان (أ س // ب ص)
٢- مستقيمان متخالفان (أب و س ن)
٣- مستقيمان متعامدان (جـ ع، ع ص)
٤- مستويان متقاطعان (أ س ص، س ص ع)
٥- مستويان متوازيان (أ ب جـ، س ص ع)
٦- مستقيم يقع في مستوى (ن م يقع في المستوى س ص ع)



تمارين ومسائل: (علمي فقط) (١ - ٧) نظرية الأعمدة الثلاثة

س١: المثلث أ ب جـ فيه الزاوية ب قائمة، رسم جـ د ⊥ المستوى أ ب جـ، ثم وصل أ د، نصف ب جـ في هـ، وكذلك نصف أ د، في و. أثبت أن : و هـ ⊥ ب جـ.

المعطيات: الزاوية ب قائمة، جـ د ⊥ المستوى أ ب جـ.
هـ، و منتصفا ب جـ، أ د

المطلوب: إثبات أنّ: و هـ ⊥ ب جـ

العمل: ننصف أ جـ في ل، نصل ل هـ، ل و

البرهان: بما أنّ: هـ منتصف ب جـ ، ل منتصف أ جـ

بما أنّ: ل هـ يوازي أ ب ∴ الزاوية ل هـ جـ قائمة

وبما أنّ: ل منتصف أ جـ، و منتصف أ د ∴ ل و يوازي جـ د

وبما أنّ: ل و ⊥ على المستوى أ ب جـ ∴ يكون و هـ مائلاً على المستوى أ ب جـ

مسقطه ل هـ عمودي على ب جـ الواقع في المستوى أ ب جـ

∴ المائل و هـ ⊥ ب جـ وهو المطلوب.

س٢: أ ب جـ مثلث، رُسم جـ د عمودياً على المستوى أ ب جـ ، ثم وُصل د أ، ونصف أ د، أ جـ، ب جـ في م، ل، ن على الترتيب. ثم وُصل م ن، فكان عمودياً على ب جـ . أثبت أنّ الزاوية أ ب جـ قائمة.

البرهان: بما أنّ: م ل يوازي د جـ

جـ د ⊥ على المستوى أ ب جـ

م ل ⊥ على المستوى أ ب جـ

∴ ل ن هو مسقط المائل م ن على المستوى أ ب جـ

وبما أنّ المائل م ن ⊥ ب جـ الواقع في المستوى أ ب جـ.

∴ مسقطه ل ن ⊥ ب جـ

∴ الزاوية ل ن جـ قائمة

وبما أنّ: ل ن يوازي أ ب ∴ الزاوية أ ب جـ قائمة.

س٣:

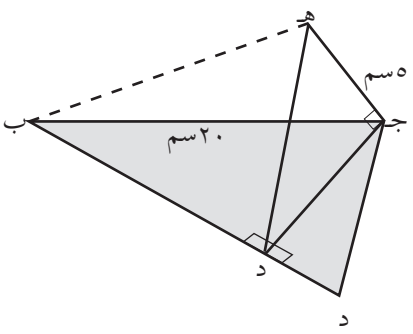
الحل: (هـ ب)^{٢} = (ب و)^{٢} + (و هـ)^{٢} = ٢٠٠ + ٢٢٥ = ٤٢٥ ومنها هـ ب = $\sqrt{٤٢٥}$

(هـ ب)^{٢} = (ب جـ)^{٢} + (جـ هـ)^{٢} = ٢٠٠ + ٢٢٥ = ٤٢٥ ومنها ص = $\sqrt{٤٢٥}$

جـ و = وب = س

٢(س)^{٢} = ٤٠٠ ومنها س = جـ و = $\sqrt{٢٠٠}$

(هـ و)^{٢} = ٢٠٠ + ٢٥ = ٢٢٥ ومنها: هـ و = ١٥



س١:

الفرع	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
الرمز	أ	ج	ب	أ	ب	د	ب	أ	ب	د
الجواب	١	لا يقعان في مستوى واحد ولا يتقاطعان	٣	٩٠	٣	(١٧، ٢، ٦)	٢	متساوي الأضلاع	$\overleftarrow{أ}$ و $\overleftarrow{ب}$ في الإتجاه نفسه	١٠٨

س٢: $\overleftarrow{أ}$ = (١، ٠، -١)، $|\overleftarrow{أ}| = \sqrt{١ + ٠ + ١} = \sqrt{٢}$

جتاهـ$_١ = \frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، ومنها **هـ**$_١ = ٤٥°$، **جتاهـ**$_٢ = ٠$ ومنها: **هـ**$_٢ = ٩٠°$، **جتاهـ**$_٣ = \frac{-١}{\sqrt{٢}}$ ومنها: **هـ**$_٣ = ١٣٥°$

س٣: $\overleftarrow{أ} . \overleftarrow{ب} = (س، \sqrt{٧٥}) . (س، ٠) = س^٢$

جتاهـ $= \frac{س^٢}{\sqrt{س^٢ + ٧٥} \times \sqrt{س^٢}} = \frac{س}{\sqrt{س^٢ + ٧٥}} = \frac{١}{٢}$ وبتربيع الطرفين وترتيب المعادلة س = $\pm$ ٥، س = -٥ ترفض

س٤: $\overleftarrow{أ}$ = (-١، -٢) وكان $\overleftarrow{ب}$ = (م، -١)

أ) $\frac{-٢}{-١} = \frac{-١}{م}$ ومنها: م = $\frac{-١}{٢}$ ملحوظة: يمكن الحل باستخدام **جتاهـ**

ب) (-١، -٢) . (م، -١) = ٠ ، ومنها: -م +٢ = ٠ ومنها: م = ٢

جـ) **جتا**٤٥ $= \frac{-م + ٢}{\sqrt{٥} \times \sqrt{م^٢ + ١}} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$ وبتربيع الطرفين وحل المعادلة: م = $\frac{١}{٣}$ او -٣

س٥: $|\overleftarrow{أ}| = ٤، |\overleftarrow{ب}| = ١٠$ **هـ** = ٦٠

١) $\overleftarrow{أ} . \overleftarrow{ب} = ٤ \times ١٠ \times \frac{١}{٢} = ٢٠$

٢) $|\overleftarrow{أ} + \overleftarrow{ب}|^٢ = |\overleftarrow{أ}|^٢ + ٢|\overleftarrow{أ}| \times |\overleftarrow{ب}|$ **جتا**٦٠° $+ |\overleftarrow{ب}|^٢ = ١٦ + ٤٠ + ١٠٠ = ١٥٦$ ومنها: $|\overleftarrow{أ} + \overleftarrow{ب}| = \sqrt{١٥٦}$

٣) $|\overleftarrow{أ} - \overleftarrow{ب}|^٢ = ١٦ - ٤٠ + ١٠٠ = ٧٦$ ومنها: $|\overleftarrow{أ} - \overleftarrow{ب}| = \sqrt{٧٦}$

س٦: أ (٢، ٢)، ب (-٢، ٥)، ج (٧، -٥)، ء (-٣، ٨)

$\overleftarrow{م} = (-٩، ٢٤) = ٣(-٨، -٣) = ٣\overleftarrow{ء}$ أي ان $\overleftarrow{م} \parallel \overleftarrow{ء}$

حل آخر: $\overleftarrow{م} = (-٩، ٢٤)$

ظاهـ $= \frac{ص}{س} = \frac{٢٤}{-٩} = \frac{-٨}{٣}$

$\overleftarrow{ء} = (-٣، ٨)$ ظاهـ $= \frac{ص}{س} = \frac{٨}{-٣}$ $\therefore \overleftarrow{م} \parallel \overleftarrow{ء}$

س٧: أ (٧، ١، ٣) ، ب (٥، ٣، ٤) جـ (٣، ٥، ٣)

$\overleftarrow{أب} = ب - أ = (-٢، ٢، ١)$ ومنها: طول $\overleftarrow{أ ب} = ٣$

$\overleftarrow{أجـ} = جـ - أ = (-٤، ٤، ٠)$ ومنها: طول $\overleftarrow{أ جـ} = \sqrt{٣٢}$

$\overleftarrow{بجـ} = جـ - ب = (-٢، ٢، -١)$ ومنها: طول $\overleftarrow{ب جـ} = ٣$ إذن: المثلث متساوي الساقين.

س٨: ١) بما أن: $\overleftarrow{أ} \parallel \overleftarrow{ب}$ إذن: $\frac{ك}{١} = \frac{٣}{٦} = \frac{م}{٢}$ ومنها: ك $= \frac{١}{٢}$ و م $= ١$

$\overleftarrow{ب} = (ك، ٣، م) = (\frac{١}{٢}، ٣، ١)$ و $\overleftarrow{جـ} = (ك، م، ك + م) = (\frac{١}{٢}، ١، \frac{٣}{٢})$

$|\overleftarrow{أ ب}|^٢ - ٤ \overleftarrow{ب جـ} = ٢ \times (\frac{١٤}{٤}) - ٤ \times (\frac{٤١}{٤}) = -٣٤$

٢) $٤(\overleftarrow{ب} . \overleftarrow{جـ}) (\overleftarrow{أ}) = ٤(\frac{١}{٤} + ٣ + \frac{٣}{٢}) . (١، ٦، ٢) = ١٩ (١، ٦، ٢)$

$= (١٩، ١١٤، ٣٨)$

س٩: **جتا^{٢}هـ$_١$ + جتا^{٢}هـ$_٢$ + جتا^{٢}هـ$_٣$** $= ١$ لكن: **هـ$_١$ = هـ$_٢$ = هـ$_٣$** اذن

٣**جتا^{٢}هـ** $= ١$ ومنها: **جتا^{٢}هـ** $= \frac{١}{٣}$ ومنها: **جتاهـ** $= \frac{١}{\sqrt{٣}} = \frac{ق_١^٢}{\sqrt{٣} ق_١^٢} = \frac{ق_٢^٢}{\sqrt{٣} ق_٢^٢} = \frac{ق_٣^٢}{\sqrt{٣} ق_٣^٢}$

ومنها: أ(٨، ٨، ٨) ومنها: $\overleftarrow{أ} = ٨ \overleftarrow{ق_١} + ٨ \overleftarrow{ق_٢} + ٨ \overleftarrow{ق_٣}$

س١٠: أثبت أن $|\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب}|^٢ + (\overleftarrow{أ} . \overleftarrow{ب})^٢ = |\overleftarrow{أ}|^٢ |\overleftarrow{ب}|^٢$

الطرف الأيمن: $|\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب}|^٢ + (\overleftarrow{أ} . \overleftarrow{ب})^٢ = (|\overleftarrow{أ}| |\overleftarrow{ب}| \text{ جاهـ})^٢ + (|\overleftarrow{أ}| |\overleftarrow{ب}| \text{ جتاهـ})^٢$

$= |\overleftarrow{أ}|^٢ |\overleftarrow{ب}|^٢ \text{ جا}^٢\text{هـ} + |\overleftarrow{أ}|^٢ |\overleftarrow{ب}|^٢ \text{ جتا}^٢\text{هـ}$

$= |\overleftarrow{أ}|^٢ |\overleftarrow{ب}|^٢ \times (\text{جا}^٢\text{هـ} + \text{جتا}^٢\text{هـ})$

$= |\overleftarrow{أ}|^٢ |\overleftarrow{ب}|^٢ \times ١ = |\overleftarrow{أ}|^٢ |\overleftarrow{ب}|^٢$

حلول الوحدة الثانية: المنطق

تمارين ومسائل: (٢ - ١)

س١: الجمل التي تمثل عبارات رياضية هي: أ، ب، جـ ، د . لكن: هـ، و لا تمثل عبارات رياضية.

س٢: ١)خ ٢) خ ٣) خ ٤) ص ٥) ص ٦) ص

س٣: نفي العبارات : ١) منحنى الاقتران ق(س) = $\sqrt{س}$ غير متماثل حول نقطة الأصل.

٢) $\sqrt{٤٥} \leq \sqrt[٣]{١٣٥}$

٣) ق(س) = $س^{٢}$ ليس اقتراناً فردياً.

٤) العدد $٢^{١٠}$ ليس من مضاعفات العدد ٣٢

٥) الصفر عدد غير نسبي.

٦) المستقيم الذي معادلته س = ٢ لا يعامد المستقيم الذي معادلته ص = $\frac{١}{٢}$

س٤:

١	٢	٣	٤	٥
ب	أ	جـ	د	أ

تمارين ومسائل: (٢ - ٢)

س١: أ) النيون من العناصر النبيلة، والكبريت ليس فلزاً.
ب) النيون ليس من العناصر النبيلة، والكبريت ليس فلزاً.
ج) النيون ليس من العناصر النبيلة، أو الكبريت فلز.

س٢: أ) خ ب) ص ج) خ

س٣:

١	٢	٣	٤
ج	أ	د	أ

تمارين ومسائل: (٢ - ٣)

س١: ١) إذا كان الوتر أطول أضلاع المثلث قائم الزاوية فإن مجموع قياسات زوايا الخماسي الداخلية = ٥٤٠°

٢) إذا كان مجموع قياسات زوايا الشكل الخماسي الداخلية لا يساوي ٥٤٠° ، فإنّ الوتر ليس أطول أضلاع المثلث قائم الزاوية.

٣) الوتر ليس أطول أضلاع المثلث قائم الزاوية، إذا وفقط إذا مجموع قياسات زوايا الخماسي الداخلية = ٥٤٠ درجة

س٢: ١- ص. ٢- خ. ٣- ص. ٤- ص.

س٣: ١- م ← ن ٢- ن ↔ ع ٣- (م ∧ ع) ← ن ٤- (ع ∨ م) ← ن

س٤: يجيب الطلبة بعبارات من إنشائهم

س٥:

١-

ف	ن	ف ← ن	~ف	(ف ← ن)∧~ف
ص	ص	ص	خ	خ
ص	خ	خ	خ	خ
خ	ص	ص	ص	ص
خ	خ	ص	ص	ص

٢-

ف	ن	~ف	~ف∨ن	~ن	ف∧~ن	(~ف∨ن) ← (ف∧~ن)
ص	ص	خ	ص	خ	خ	خ
ص	خ	خ	خ	ص	ص	ص
خ	ص	ص	ص	خ	خ	خ
خ	خ	ص	ص	ص	خ	خ

٣-

ف	ن	م	ف ← ن	~(ف ← ن)	~م	(~ف∨ن) ← (ف∧~ن)
ص	ص	ص	ص	خ	خ	خ
ص	ص	خ	ص	خ	ص	خ
ص	خ	ص	خ	ص	خ	خ

ص	خ	خ	خ	ص	ص	ص
خ	ص	ص	ص	خ	خ	خ
خ	خ	خ	ص	خ	ص	خ
خ	ص	ص	ص	خ	خ	خ
خ	خ	خ	ص	خ	ص	خ

س٦:

ف	ن	~ل	ف ← ~ل	~ ف ∧ ~ ن	ف ← (~ل∧~ف)
ص	ص	خ	ص	خ	ص
ص	خ	ص	ص	خ	ص
خ	ص	خ	ص	خ	ص
خ	خ	ص	خ	ص	خ

الحل أعلاه يمثل أحد الحلول، بالإمكان البحث عن آخر ...

تمارين ومسائل: (٢ - ٤)

س١:

ف	ل	~ل	ف ← ~ل	~ف	~ف∧ل
ص	ص	خ	خ	خ	خ
ص	خ	ص	ص	خ	خ
خ	ص	خ	ص	ص	ص
خ	خ	ص	ص	ص	خ

أ) بملاحظة قيم صواب العبارتين: ف ← ~ل ، ~ف∧ل المتناظرة، نجد أنهما غير متكافئتين.

ف	ن	ف ∧ ن	~ف	ف ∧ ن ← ~ف	~ن	~ف ∨ ~ن
ص	ص	ص	خ	خ	خ	خ
ص	خ	خ	خ	ص	ص	ص
خ	ص	خ	ص	ص	خ	ص
خ	خ	خ	ص	ص	ص	ص

ب) بملاحظة قيم صواب العبارتين: ف ∧ ن ← ~ف، ~ف ∨ ~ن نجد أنهما متكافئتان.

س٢: ١) $\forall$ ٢ ∄ص ← ٣∄ط

٢) إذا كان السمك غير عالي القيمة الغذائية إذن: التدخين غير مضر بالصحة والفواكه ليست مفيدة.

س٣: ١) المثلث متساوي الأضلاع وغير حاد الزوايا.

٢) المنطق من فروع الرياضيات، والرياضيات ليست لغة العلوم.

س٤: ١) ~(ف ← ~ن) ≡ ف ∧ ن

الحل: ~(ف ← ~ن) ≡ ف ∧ ~(~ن) ≡ ف ∧ ن

٢) ف ← (ف ∨ ~ن) ≡ ~ف ∨ (ف ∨ ~ن)

≡ ~ف ∨ ~ن ∨ ف (خاصية التبديل)

≡ ~(ف ∧ ن) ∨ ف

≡ (ف ∧ ن) ← ف

٣) (~ف ∨ ن) ← (ف ∧ ~ن) ≡ ~(ف ← ن)

الحل: (~ف ∨ ن) ← (ف ∧ ~ن) ≡ ~(~ف ∨ ن) ∨ (ف ∧ ~ن)

≡ (~~ف ∧ ~ن) ∨ (ف ∧ ~ن)

≡ (ف ∧ ~ن) ∨ (ف ∧ ~ن)

≡ (ف ∧ ~ن)

≡ ~(ف ← ن)

٤) ف ← (ن ∧ ~م) ≡ (ف ← ن) ∧ (ف ← ~م)

≡ ~ف ∨ (ن ∧ ~م)

≡ (~ف ∨ ن) ∧ (~ف ∨ ~م)

≡ (ف ← ن) ∧ (ف ← ~م)

٥) (ف ← ن) ∨ (م ← ل) ≡ (ف∧م) ← (ل ∨ ن)

الحل: (ف ← ن) ∨ (م ← ل) ≡ (~ف∨ن) ∨ (~م∨ل)

≡ (~ف∨~م) ∨ (ل∨ن)

≡ ~(ف∧م) ∨ (ل∨ن)

≡ (ف∧م) ← (ل∨ن)

تمارين ومسائل: (٢ - ٥)

س١: ١- د. ٢- ب. ٣- أ. ٤- ب.

س٢: ١- {٠، ١}. ٢- ∅. ٣- {-٥، ٥}. ٤- {٥، ٦}. ٥- ص

٦-{(٢، ٤)، (٤، ٢)، (٨، ١)، (١، ٨)، (-٢، -٤)، (-٤، -٢)، (-٨، -١)، (-١، -٨)} ٧- $\{\frac{\pi}{٢}\}$

س٣: ١) س − ٢ ⩾ ٢ ومنها: س ⩾ ٤ مجموعة حل ق(س) = {١، ٢، ٣، ٤}

٢س+١ = ٧ ومنها: س = ٣ مجموعة حل هـ(س) = {٣}

٢) مجموعة حل ق(س) ∨ هـ(س) = {١، ٢، ٣، ٤}

٣) مجموعة حل ق(س) ∧ هـ(س) = {٣}

٤) مجموعتا حليهما غير متساويتين، إذن: غير متكافئتين.

س٤: **الحل:** حل ق(س) = ٢جا٢س − ٣جاس + ١ = ٠

= (٢جاس − ١) (جاس − ١) = ٠

إمّا: (٢جاس − ١)= ٠ ⟸ جاس = $\frac{١}{٢}$ ⟸ س = $\frac{\pi}{٦}$، $\frac{\pi ٥}{٦}$

أو: (جاس − ١) = ٠ ⟸ جاس = ١ ⟸ س = $\frac{\pi}{٢}$ مجموعة حل ق(س) = $\{\frac{\pi}{٦}، \frac{\pi}{٢}، \frac{\pi ٥}{٦}\}$

حل هـ(س) = ظا٢س − $\sqrt{٣}$ ظاس = $\frac{-٢}{٣}$ ⟸ ٣ظا٢س − $\sqrt{٣}$٣ ظاس + ٢ = ٠

⟸ ($\sqrt{٣}$ ظاس −٢)(٣ظاس − ١) = ٠

إما: ظاس = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ⟸ س = $\frac{\pi}{٦}$، $\frac{\pi ٧}{٦}$ أو: ظاس = $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ ∴ س تساوي تقريباً $\frac{\pi ٤٩}{١٨٠}$

∴ مجموعة حل ق(س) ∧ هـ(س) = $\{\frac{\pi}{٦}\}$ (العناصر المشتركة)

س٥: ١- ص ⟵ خ العبارة خاطئة.

٢- خ ⟵ ص العبارة صائبة.

٣- خ∨خ العبارة خاطئة.

٤- خ ⟵ (ص∧خ) العبارة صائبة.

تمارين ومسائل: (٢ - ٦)

س١: ١) ج. ٢) أ. ٣) د.

س٢: ١) ص. ٢) خ. ٣) ص. ٤) خ. ٥) خ

س٣: ١) ص. ٢) خ. ٣) ص. ٤) ص. ٥) ص

تمارين ومسائل: (٢ - ٧)

س١: ١) ج. ٢) ب

س٢: ١) ص. ٢) خ. ٣) ص

س٣: ١) بعض المربعات ليست معينات.

٢) كل الاقترانات ليست دائرية.

٣) ∀ (س، ص) ∈ ط×ط ، س < ص

٤) بعض مماسات الدائرة ليست عمودية على أنصاف أقطارها.

تمارين ومسائل: (٢ - ٨)

س١: أثبت أنّ :إذا كان ك عدداً فردياً، فإنّ ك^{٢} عدد فردي.

نفرض ف: ك عدد فردي

ن: ك^{٢}

المطلوب إثبات: ف ⟵ ن.

ك = ٢م + ١، ك^{٢} = (٢م + ١)^{٢} = ٤م^{٢} + ٤م + ١ = ٢(٢م^{٢} + ٢م) + ١

= ٢و + ١ = عدد فردي.

س٢: أثبت أنّ: إذا كان ك، ل ، م، ثلاثة أعداد صحيحة موجبة ، وكان باقي قسمة ك على م = باقي قسمة ل على م فإنّ: ك – ل يقبل القسمة على م.

البرهان

نفرض ف: باقي قسمة ك على م = باقي قسمة ل على م

ن: ك – ل يقبل القسمه على م.

المطلوب إثبات: ف ⟵ ن.

نفرض ك = ر م + و، ل = ع م + و، ر، م، ع، و ∋ ص

ك – ل = ر م + و – ع م – و = ر م – ع م = م (ر – ع) = ح م حيث: ح ∋ ص.

إذن: ك – ل يقبل القسمة على م.

س٣: أثبت أنّ: إذا كان أ، ب عددين حقيقيين، فإنّ: $\sqrt{أ^{٢} + ب^{٢}} \geqslant |أ| + |ب|$.

نفرض ف: أ، ب عددان حقيقيان، المطلوب إثبات: ف ⟵ ن.

ن: $\sqrt{أ^{٢} + ب^{٢}} \geqslant |أ| + |ب|$

∵ |أ| ⩾ ٠ ، ∵ |ب| ⩾ ٠ ⟸ |أ| × |ب| ⩾ ٠ . نضرب الطرفين في العدد ٢، فينتج:

٢ |أ| × |ب| ⩾ ٠ ، بإضافة $أ^{٢} + ب^{٢}$ إلى الطرفين ينتج أنّ:

$أ^{٢} + ب^{٢} + ٢|أ||ب| \geqslant أ^{٢} + ب^{٢}$ لكن: $أ^{٢} = |أ|^{٢}$، $ب^{٢} = |ب|^{٢}$ ومنه:

$|أ|^{٢} + |ب|^{٢} + ٢|أ||ب| \geqslant أ^{٢} + ب^{٢}$، إذن: $(|أ| + |ب|)^{٢} \geqslant أ^{٢} + ب^{٢}$

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين ينتج أنّ: $|أ| + |ب| \geqslant \sqrt{أ^{٢} + ب^{٢}}$

س٤: استخدم البرهان غير المباشر لإثبات أنّ: إذا كان $ك^{٢}$ يقبل القسمة على ٣ فإنّ: ك يقبل القسمه على ٣.

ف: $ك^{٢}$ يقبل القسمة على ٣.

ن: ك يقبل القسمه على ٣.

المطلوب إثبات أنّ: ف ⟵ ن، وبطريقة الإثبات غير المباشر نثبت صحة:

~ن ⟵ ~ف حيث ~ن: ك لا يقبل القسمه على ٣.

~ف: $ك^{٢}$ لا يقبل القسمة على ٣.

ك لا يقبل القسمه على ٣ ، إذن: ك = ٣ل + و ، و = ١ ، ٢ (وهي الباقي)

$ك^{٢} = (٣ل + و)^{٢} = ٩ل^{٢} + ٦ل و + و^{٢} = ٣ (٣ل^{٢} + ٢ل و) + و^{٢}$ ، ومنه:

$ك^{٢} = ٣ ع + و^{٢}$ ، وهذا لا يقبل القسمة على ٣ ؛لأن: $و^{٢} = ١$ ، أو ٤ لا تقبل القسمة على ٣ .

س٥: قطع وليد مسافة تزيد عن ٣٦٠ كم في رحلة ، وتوقف أثناء سفره مرتين فقط، استخدم البرهان بالتناقض؛ لإثبات أنّ وليداً قطع أكثر من ١٢٠ كم في إحدى مراحل رحلته الثلاث على الأقل.

س: المسافة المقطوعه في المرحلة الأولى.

ص: المسافة المقطوعه في المرحلة الثانية.

ع: المسافة المقطوعه في المرحلة الثالثة.

ف: س + ص + ع > ٣٦٠ ، ن : س> ١٢٠ ، أو ص >١٢٠ ، أو ع > ١٢٠

المطلوب: إثبات أنّ: ف ⟵ ن، البرهان بالتناقض.

نفرض: ف صحيحه، ن خاطئة، إذن: ~ن: س ⩽١٢٠و ص ⩽١٢٠ و ع ⩽١٢٠

إذن: س + ص + ع ⩽ ٣٦٠، وهذا يتناقض مع كون س + ص + ع > ٣٦٠

إذن: الافتراض خاطئ، ومنه: س>١٢٠، أو ص >١٢٠ ، أو ع > ١٢٠

س٦: أثبت أن : $(٨)^{ن} - ١$ يقبل القسمه على ٧.

نثبت صحة هذه العباره باستخدام الاستقراء الرياضي

عندما ن = ١ ، $٨^{١} - ١ = ٧$ تقبل القسمه على ٧

نفرض أنّ العبارة صحيحة عندما: ن = ك ، أي أن: $(٨)^{ك} - ١$ يقبل القسمه على ٧.

نثبت صحة العبارة عندما: ن = ك + ١

$(٨)^{ك+١} - ١$ يقبل القسمه على ٧، ومنه: $(٨)^{ك} - ١ = ٧$ ك ، إذن: $(٨)^{ك} = ٧$ك + ١

بضرب الطرفين في العدد ٨: $(٨)^{ك+١} = ٥٦$ك + ٨ بطرح ١ من الطرفين ينتج:

$(٨)^{ك+١} - ١ = ٥٦$ك + ٧ = ٧(٨ك + ١) ومنه $(٨)^{ك+١} - ١ = ٧$و

أي أن: $(٨)^{ك+١} - ١$ يقبل القسمة على ٧.

س٧: أثبت أنّ : $(٢)^{١} + (٢)^{٢} + (٢)^{٣} + \ldots + (٢)^{ن} = (٢)^{ن+١} - ٢$.

نثبت صحة هذه العباره باستخدام الاستقراء الرياضي

عندما ن = ١، $٢^{١} = ٢$، $(٢)^{١+١} - ٢ = ٤ - ٢ = ٢$ العباره صحيحة

نفرض أنّ العبارة صحيحة عندما ن = ك،

أي أنّ: $(٢)^{١} + (٢)^{٢} + (٢)^{٣} + \ldots + (٢)^{ك} = (٢)^{ك+١} - ٢$.

نثبت صحة العبارة عندما: ن = ك + ١، بمعنى:

$(٢)^{١} + (٢)^{٢} + (٢)^{٣} + \ldots + (٢)^{ك+١} = (٢)^{ك+٢} - ٢$

$(٢)^{١} + (٢)^{٢} + (٢)^{٣} + \ldots + (٢)^{ك} = (٢)^{ك+١} - ٢$ بإضافة $(٢)^{ك+١}$ إلى الطرفين

$(٢)^{١} + (٢)^{٢} + (٢)^{٣} + \ldots + (٢)^{ك} + (٢)^{ك+١} = (٢)^{ك+١} - ٢ + (٢)^{ك+١}$

$(٢)^{١} + (٢)^{٢} + (٢)^{٣} + \ldots + (٢)^{ك} + (٢)^{ك+١} = ٢(٢)^{ك+١} - ٢$

$(٢)^{١} + (٢)^{٢} + (٢)^{٣} + \ldots + (٢)^{ك} + (٢)^{ك+١} = (٢)^{ك+٢} - ٢$

س٨: بالتناقض نفرض أنّ: أ $>$ ٠ و $\frac{ب+١}{ب+٢} \leqslant \frac{ب+٢}{ب+٣}$

ومنها: $\frac{ب+١}{ب+٢} - \frac{ب+٢}{ب+٣} \leqslant ٠$

بتوحيد المقامات والاختصار ينتج: $\frac{-٢}{ب^٢ + ٤ب + ٣} \leqslant ٠$

إذن: يوجد تناقض؛ لأنّ هذا المقدار أصغر من صفر.

تمارين عامة الوحدة الثانية

س١:

١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
د	ب	د	أ	ج	ج	أ	د	د

س٢: أ) ص. ب) ص. ج) ص. د) ص. هـ) ص.

س٣:

ف	ن	ف ← ن	ن ← ف
ص	خ	خ	ص
ص	ص	ص	ص
خ	ص	ص	خ
خ	خ	ص	ص

أ) من خلال الجدول نلاحظ أنّ: ف ← ن ≢ ن ← ف

ب)

ف	ن	ف ← ن	~ ف	~ ن	~ ف ← ن	ن ← ~ ف	~ ن ← ~ ف
ص	ص	ص	خ	خ	ص	ص	ص
ص	خ	خ	خ	ص	ص	ص	خ
خ	ص	ص	ص	خ	خ	ص	ص
خ	خ	ص	ص	ص	ص	ص	ص

جـ) نلاحظ من الجدول السابق أن ف ← ن ≡ ن ← ~ ف

س٤ أ) (ف ← ن) ∨ (ف ← م) $\overset{؟}{\equiv}$ ف ← (ن ∨ م)

الطرف اليمين: (ف ← ن) ∨ (ف ← م) ≡ (~ف ∨ ن) ∨ (~ف ∨ م)

≡ ~ف ∨ ن ∨ م

≡ ~ف ∨ (ن ∨ م)

≡ ف ← (ن ∨ م)

ب) ~ف ∨ (ن ∧ ~م) $\overset{؟}{\equiv}$ ~((ف ← ن) ← (ف ∧ م)

الطرف الأيسر: ~((ف ← ن) ← (ف ∧ م)

≡ (ف ← ن) ← ~(ف ∧ م)

≡ ~ف ∨ ن ∨ (~ف ∨ ~م)

≡ ~ف ∨ ن ∨ ~ف ∨ ~م

≡ ~ف ∨ (ن ∧ ~م)

س٥: ف خاطئة، ن صائبة

س٦: أثبت أن: إذا كان س ≠ ص فإن: $أ^{س} \neq أ^{ص}$ ، حيث: أ > ٠ ، أ ≠ ١

ف: س ≠ ص، ن : $أ^{س} \neq أ^{ص}$، حيث: أ > ٠، أ ≠ ١

المطلوب إثبات أنّ : ف ← ن، البرهان بالتناقض

نفرض ف صحيحه، ن خاطئة، إذن:~ن: $أ^{س} = أ^{ص}$

$أ^{س} = أ^{ص}$ بأخذ لـو$_{أ}$ للطرفين، لـو$_{أ}$ $أ^{س}$ = لـو$_{أ}$ $أ^{ص}$ ومنه: س = ص وهذا يتناقض مع كون س ≠ ص إذن: $أ^{س} \neq أ^{ص}$.

س٧: أثبت باستخدام الاستقراء الرياضي أنّ: $(١)^{٣} + (٢)^{٣} + (٣)^{٣} + \ldots + (ن)^{٣} = (ن^{٢}(ن+١)^{٢}) \setminus ٤$

نثبت صحة هذه العباره باستخدام الاستقراء الرياضي

عندما ن = ١ ،$(١)^{٣}$ = ١، $(١^{٢}(١+١)^{٢})\setminus ٤$ = ١. العباره صحيحة

نفرض أنّ العبارة صحيحة عندما ن = ك ،

أي أنّ: $(١)^{٣} + (٢)^{٣} + (٣)^{٣} + \ldots + (ك)^{٣} = (ك^{٢}(ك+١)^{٢})\setminus ٤$

نثبت صحة العبارة عندما: ن = ك +١ أي نثبت أنّ:

$(١)^{٣} + (٢)^{٣} + (٣)^{٣} + \ldots + (ك)^{٣} + (ك+١)^{٣} = (ك+١)^{٢}(ك+٢)^{٢} \setminus ٤$

$(١)^{٣} + (٢)^{٣} + (٣)^{٣} + \ldots + (ك)^{٣} = (ك^{٢}(ك+١)^{٢})\setminus ٤$ باضافة $(ك+١)^{٣}$ للطرفين

$(١)^{٣} + (٢)^{٣} + (٣)^{٣} + \ldots + (ك)^{٣} + (ك+١)^{٣} = (ك^{٢}(ك+١)^{٢})\setminus ٤ + (ك+١)^{٣}$ بتوحيد المقامات

$(١)^{٣} + (٢)^{٣} + (٣)^{٣} + \ldots + (ك)^{٣} + (ك+١)^{٣} = (ك^{٢}(ك+١)^{٢} + ٤(ك+١)^{٣}) \setminus ٤$

$(١)^{٣} + (٢)^{٣} + (٣)^{٣} + \ldots + (ك)^{٣} + (ك+١)^{٣} = (ك+١)^{٢}(ك^{٢} + ٤ك+٤) \setminus ٤$

$(١)^{٣} + (٢)^{٣} + (٣)^{٣} + \ldots + (ك)^{٣} + (ك+١)^{٣} = (ك+١)^{٢}(ك+٢)^{٢} \setminus ٤$

س٨: نثبت أنها صحيحة عندما: $\text{ن} = ١$

$١ \geqslant ٢ - \frac{١}{١} = ١$

نفرض أنّها صحيحة عندما: $\text{ن} = \text{ك}$

$١ + \frac{١}{٤} + \ldots + \frac{١}{\text{ك}^٢} \geqslant ٢ - \frac{١}{\text{ك}}$ ونثبت صحتها عندما: $\text{ن} = \text{ك} + ١$

بإضافة: $\frac{١}{(\text{ك}+١)^٢}$ للطرفين في (١)

$$١ + \frac{١}{٤} + \frac{١}{(\text{ك})^٢} + \frac{١}{(\text{ك}+١)^٢} \geqslant ٢ - \frac{١}{\text{ك}} + \frac{١}{(\text{ك}+١)^٢}$$

هنا يصبح المطلوب اثبات أن $٢ - \frac{١}{\text{ك}} + \frac{١}{(\text{ك}+١)^٢} \overset{؟}{\geqslant} ٢ - \frac{١}{\text{ك}}$

أي أن $-\frac{١}{\text{ك}} + \frac{١}{(\text{ك}+١)^٢} \overset{؟}{\geqslant} -\frac{١}{\text{ك}+١}$

بتوحيد المقامات $\frac{-١(\text{ك}+١)^٢}{\text{ك}(\text{ك}+١)^٢} + \frac{\text{ك}\times١}{\text{ك}(\text{ك}+١)^٢} \overset{؟}{\geqslant} -\frac{-١\times\text{ك}(\text{ك}+١)}{\text{ك}+١\times\text{ك}(\text{ك}+١)}$

$-\text{ك}^٢ - ٢\text{ك} - ١ + \text{ك} \overset{؟}{\geqslant} -\text{ك}^٢ - \text{ك}$

$-\text{ك} - ١ \overset{؟}{\geqslant} -\text{ك}$

$-١ \geqslant ٠$ وهي صحيحة

العبارة صحيحة عند $\text{ن} = \text{ك} + ١$

تمارين ومسائل: (٣ - ١)

س١: $\sqrt{٨}$ س + ص = $\sqrt{٨}$ ، $\sqrt{٥}$ س − ٢ص = $\sqrt{٢}$

$\sqrt{٨}$ س + ص = $\sqrt{٨}$ ⟸ $\sqrt{٢}$ س + ص = $\sqrt{٢}$ ..... (١)

$\sqrt{٢}$ س − ٢ص = $\sqrt{٥}$ ..... (٢)

$\sqrt{٢}$ ٢× (س + ص = $\sqrt{٢}$ ٢)

⟸ $\sqrt{٢}$ ٢س + ٢ص = $\sqrt{٤}$ ..... (١)

$\sqrt{٢}$ س − ٢ص = $\sqrt{٥}$ ..... (٢)

$\sqrt{٢}$ ٣س = $\sqrt{٩}$

$\sqrt{٢}$ س = $\sqrt{٣}$

نعوض قيمة س في المعادلة رقم (١) $\sqrt{٢}$ ٣ − ٢ص = $\sqrt{٥}$

$\sqrt{٢}$ ص = − $\sqrt{٢}$

س٢: ٣جا$\frac{أ}{٢}$ + ٢جتا ب = $\frac{١}{٢}$ ، ٢جا$\frac{أ}{٢}$ − ٣جتا ب = $\frac{٥}{٢}$

٣× (٣جا$\frac{أ}{٢}$ + ٢جتا ب = $\frac{١}{٢}$)

٢× (٢جا$\frac{أ}{٢}$ − ٣جتا ب = $\frac{٥}{٢}$)

٩جا$\frac{أ}{٢}$ + ٦جتا ب = $\frac{٣}{٢}$

٤جا$\frac{أ}{٢}$ − ٦جتا ب = ٥

١٣جا$\frac{أ}{٢}$ = $\frac{١٣}{٢}$

ومنه: ١٣جا$\frac{أ}{٢}$ = $\frac{١٣}{٢}$ ⟸ جا$\frac{أ}{٢}$ = $\frac{١}{٢}$ ∴ أ = $\frac{\pi}{٦}$ ، ٥ $\frac{\pi}{٦}$

نعوض ونجد قيمة ب هي: جتا ب = $\frac{-١}{٢}$ ⟸ ب = $\frac{\pi ٢}{٣}$

س٣: ٧س + ٥ص – ٣ع = –٨ ..... (١)

٣س – ٥ص + ٢ع = –٤ ..... (٢)

٥س + ٣ص + ع = ٠ ..... (٣)

نجمع ١ مع ٢

٧س + ٥ص – ٣ع = –٨ ..... (١)

٣س – ٥ص + ٢ع = –٤ ..... (٢)

١٠س – ع = –١٢ ..... (٤)

المعادلة ٢ مع ٣

٣×(٣س – ٥ص + ٢ع = –٤) ..... (٢)

٥×(٥س + ٣ص + ع = ٠) ..... (٣)

٩س – ١٥ص + ٦ع = –١٢ ..... (٢)

٢٥س + ١٥ص + ٥ع = ٠ ..... (٣)

٩س – ١٥ص + ٦ع = –١٢ ..... (٢)

٢٥س + ١٣ص + ٥ع = ٠ ..... (٣)

٣٤س + ١١ع = –١٢ ..... (٥)

نأخذ المعادلة ٤ مع ٥

١١×(١٠س – ع = –١٢) ..... (٤) ⟸ ١١٠س – ١١ع = –١٣٢ ..... (٤)

٣٤س + ١١ع = –١٢ ..... (٥) ٣٤س + ١١ع = –١٢ ..... (٥)

١٤٤س = –١٤٤ ∴ س = –١

ونعوض ونجد قيمة: ع = ٢، ص = ١

س٤: نفرض أنّ عدد الدقائق العرض الأول: س، والثاني: ص، والثالث: ع.

س + ص + ع = ٤٥٠ ..... (١)

س + ص = ٢٥٠ ..... (٢)

ص + ع = ٣٥٠ ..... (٣)

بتعويض (٢) في (١) ينتج: ٢٥٠ + ع = ٤٥٠ ⟸ ع = ٢٠٠

ص = ٣٥٠ – ٢٠٠ ⟸ ص = ١٥٠

س = ٢٥٠ – ١٥٠ ⟸ س = ١٠٠

س٥: عدد شجيرات الزيتون = س، اللوز = ص، التفاح = ع

ص + ع = ٥٠ ..... (١)

س + ع = ٦٠ ..... (٢)

س + ص = ٧٠ ..... (٣)

نطرح (٢) من (١) ينتج:

س + ع = ٦٠ ..... (٢)

ص + ع = ٧٠ ..... (١)

ص – س = –١٠ ..... (٤)

ص – س = –١٠ ..... (٤)

س + ص = ٧٠ ..... (٣)

٢ص = ٦٠ ⟸ ص = ٣٠، ع = ٢٠، س = ٤٠

س٦: ف = $أ هـ^{٢}$ + ب هـ + جـ

ف (١) = أ + ب + جـ = ٤٥ .....(١)

ف (٢) = ٢أ + ٤ب + جـ = ٦٠ .....(٢)

ف (٣) = ٣أ + ٩ب + جـ = ٦٥ .....(٣)

بحل المعادلات ينتج: أ = ٣٠م/ ث (السرعة الابتدائية) ، ب = –٥ ومنها: التسارع ٢ب= –١٠ م/ ث٢ ، جـ = ٢٠م (ارتفاع البناية)

س١: س + ص = ٥ ..... (١) ⟸ س = ٥ – ص

٣س^{٢} – ٢ص^{٢} = ١٩ ..... (٢)

نعوض: ٣(٥ – ص)^{٢} – ٢ص^{٢} = ١٩

٣(٢٥ – ١٠ ص +ص^{٢}) – ٢ص^{٢} = ١٩

ص^{٢} – ٣٠ص + ٥٦ = ٠

(ص – ٢٨) (ص – ٢) = ٠

ص = ٢٨ ، ص = ٢

س = –٢٣، س = ٣

(–٢٣، ٢٨)، (٣، ٢)

س٢: نفرض طول السجادة = س، عرض السجادة = ص.

س= ص+١

س^{٢} + ص^{٢} = ١٣ نعوض: (ص+١)^{٢} + ص^{٢} = ١٣

ص^{٢} +٢ص + ١ +ص^{٢} = ١٣

ص^{٢} +ص – ٦ = ٠

(ص + ٣) (ص – ٢) = ٠ ومنه: ص = ٢ متر ، س = ٣ أمتار

س٣: معادلة المستقيم هي: ص–٥ = ٣ (س – ٢) ⟸ ص–٥ = ٣س –٦ ⟸ ص = ٣ س – ١

نعوض قيمة ص في المعادلة: ٢(٣س–١)^{٢} –٣س^{٢}= ٥

٢(٩س^{٢}–٦س+١) – ٣ س^{٢} = ٥

١٨س^{٢}–١٢س +٢–٣س^{٢}=٥

٥س^{٢}– ٤س –١ = ٠ ومنها: (٥س +١) (س– ١) = ٠

⟸ س = $\frac{-١}{٥}$ ، س = ١ ⟸ ($\frac{-١}{٥}$ ، $\frac{-٨}{٥}$)

⟸ ص= $\frac{-٨}{٥}$ ، ص= ٢ ⟸ (١، ٢)

س٤: المستقيم ٣س + ٣ص = ٦ ، مع المنحنى $(٢س + ص)^{٢} + (٢س - ص)^{٢} = ٨$

$٣س + ٣ص = ٦ \Longleftarrow ص = \frac{٦ - ٢س}{٣}$

$٤س^{٢} + ٤س ص + ص^{٢} + ٤س^{٢} - ٤س ص + ص^{٢} = ٨$

$٨س^{٢} + ٢ص^{٢} = ٨$

$٤س^{٢} + ص^{٢} = ٤$

$٤س^{٢} + (\frac{٦ - ٢س}{٣})^{٢} = ٤$

$٩ \times \left(٤س^{٢} + \frac{(٣٦ - ٢٤س + ٤س^{٢})}{٩} = ٤ \right)$

$٣٦س^{٢} + ٣٦ - ٢٤ س + ٤س^{٢} = ٣٦$

$٤٠س^{٢} - ٢٤ س = ٠$

$س(٤٠س - ٢٤) = ٠$

$س = ٠ ، \quad س = \frac{٢٤}{٤٠} = \frac{٣}{٥} \Longleftarrow (\frac{٣}{٥} ، \frac{٩}{٥})$

$ص = ٢ ، \quad ص = \frac{-٦ \frac{٢٤}{٤٠}}{٣} = \frac{٩}{٥} \Longleftarrow (٢ ، ٠)$

س٥: بتعويض قيم ص وحل المعادلة تكون نقاط التقاطع هي: $(\frac{\pm ١}{\sqrt{١٩}} ، \pm ٤ \sqrt{\frac{٣}{١٩}})$، (ملحوظة: يمكن التقريب بالآلة الحاسبة)

س٦: معادلة الدائرة: $(س - ٣)^{٢} + (ص - ٢)^{٢} = ٦١$ ، ومعادلة المستقيم ص = س

نعوض ص وبفك الأقواس فتكون نقط التقاطع: (٨، ٨)، (-٣، -٣)

تمارين ومسائل: (٣ - ٣)

س١: أ) س = ± ٦ ، ص = ± ٨

ب) س = ٣ ص = ٤

س٢: $س^{٢} + ص^{٢} = ٣٤$ ..... (١)

$٨ص^{٢} + ١٠٣ = ٧س^{٢}$ ..... (٢)

$\Leftarrow$ $٧ \times (س^{٢} + ص^{٢} = ٣٤)$

$٨ص^{٢} + ١٠٣ = ٧س^{٢}$

$٧س^{٢} + ٧ص^{٢} = ٢٣٨$

$-٧س^{٢} + ٨ص^{٢} = -١٠٣$

$١٥ ص^{٢} = ١٣٥ \Leftarrow ص^{٢} = ٩ \Leftarrow ص = ٣$

$س^{٢} + ٩ = ٣٤ \Leftarrow س^{٢} = ٢٥ \Leftarrow س = ٥$

س٣: ٢: $س^{٢} - ٦س ص + ٩ص^{٢} + س^{٢} + ٦س ص + ٩ص^{٢} = ٢٢$ (ملحوظة: تعدل المعادلة الثانية إلى: $س^{٢} - ٤ص^{٢} = -٢$)

$٢س^{٢} + ١٨ص^{٢} = ٢٢ \Leftarrow س^{٢} + ٩ ص^{٢} = ١١$

$س^{٢} + ٩ ص^{٢} = ١١$

$س^{٢} - ٤ ص^{٢} = -٢$

$١٣ ص^{٢} = ١٣$

$ص^{٢} = ١ \Leftarrow ص = \pm ١$

$س^{٢} = ٢ + ٤ ص^{٢}$

$س^{٢} = ٢ + ٤ \Leftarrow س = \pm \sqrt{٦}$

$(\pm \sqrt{٦} ، \pm ١)$

س٤: $٤س^{٢} + ٩ ص^{٢} = ٢٥٠٠$، $س^{٢} + ص^{٢} = ٥٠٠$

$٤س^{٢} + ٩ ص^{٢} = ٢٥٠٠$

$٤س^{٢} + ٤ص^{٢} = ٢٠٠٠$

$٥ص^{٢} = ٥٠٠$

$ص^{٢} = ١٠٠ \Leftarrow ص = ١٠$

$س^{٢} = ٥٠٠ - ١٠٠$

$س^{٢} = ٤٠٠ \Leftarrow س = ٢٠$

النوع الأول أبعاده: ٤٠×٣٠، والثاني ٢٠×١٠

س٥: $٤س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥٠٠$، $ص^{٢} = س^{٢} + ١٦٠٠$

$٤س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥٠٠$ ..... (١)

$س^{٢} - ص^{٢} = -١٦٠٠$ ..... (٢)

$٥س^{٢} = ٩٠٠$

$س^{٢} = ١٨٠ \Leftarrow س = \sqrt{١٨٠} = \frac{٣٠}{\sqrt{٥}} \approx ١٣,٤$

المحيط = $أب + ب جـ + جـ ء + ء أ$

$= ٢٦,٨ + ١٣,٤ + ٤٠ + ٥٠$

$= ١٣٠,٢ \approx ١٣٠$م

س٦: $س^{٢} - ص^{٢} = قا^{٢} هـ - ظا^{٢} هـ = ١$

$س^{٢} + ص^{٢} = ٧$

بحل المعادلتين بالحذف تكون نقط التقاطع: $(\pm ٢، \pm \sqrt{٣})$

تمارين ومسائل: (٣ - ٤)

س١: أ) $٤^{س^{٢}} - ٨^{س} = ٠$

$(٢^{٢})^{س^{٢}} = (٢^{٣})^{س} \Leftarrow ٢^{٢س^{٢}} = ٢^{٣س} \Leftarrow ٢س^{٢} = ٣س$

$٢س^{٢} - ٣س = ٠$

$س(٢س - ٣) = ٠$

$س = ٠ ، (٢س - ٣) = ٠$

$س = ٠ ، س = ١,٥$

ب) $هـ^{٢س} - ٥هـ^{س} + ٦ = ٠$

$(هـ^{س} - ٢)(هـ^{س} - ٣) = ٠$

$هـ^{س} = ٢، هـ^{س} = ٣$

$هـ^{س} = ٢$

$لـو_{هـ} هـ^{س} = لـو_{هـ} ٢$

$س = لـو_{هـ} ٢$

$س = لـو_{هـ} ٢، س = لـو_{هـ} ٣$

جـ) بفك الاقواس والاختصار: س=٢

س٢: $٣^{(٢س+١)} - ٣^{(س+١)} - ٣^{(س+٤)} + ٨١ = ٠$

$٣^{٢س} \times ٣^{١} - ٣^{س} \times ٣^{١} - ٣^{س} \times ٣^{٤} + ٨١ = ٠$

$٣^{٢س} - ٣ \times ٨٤ \times ٣^{س} + ٨١ = ٠$

$٣^{٢س} - ٢٨ \times ٣^{س} + ٢٧ = ٠$

$(٣^{س} - ٢٧)(٣^{س} - ١) = ٠$

$٣^{س} = ٢٧$ ، $٣^{س} = ١$

$٣^{س} = ٣^{٣}$ ، $٣^{س} = ٣^{٠}$

س = ٣ ، س = ٠

س٣: $لـو_{٢}س - لـو_{٢}(س-٤) = ٣$

$لـو_{٢}\frac{س}{س-٤} = ٣ \Leftarrow \frac{س}{س-٤} = ٨$

$٨س - ٣٢ = س \Leftarrow ٧س = ٣٢ \Leftarrow س = \frac{٣٢}{٧}$

س٤: ١) $٢لـو_{٢}س + لـو_{٢}١٦ = ٢$

$٢لـو_{٢}س + ٤ = ٢$

$٢لـو_{٢}س = -٢$

$لـو_{٢}س = -١ \Leftarrow س = \frac{١}{٢}$

٢) س= ١ ، أو: س= ١٠٠

س٥: $لـو_{٢}س^{٣} = ٥ - لـو_{٢}س^{٢}$

$لـو_{٢}س^{٣} + لـو_{٢}س^{٢} = ٥$

$لـو_{٢}س^{٣} \times س^{٢} = ٥$

$س^{٥} = ٢^{٥}$

س = ٢

س٦: ص = ٢ $^{-٠,٢}$ × ٢

ص = ٢ ^{٠} × ١٥٠٠٠ = ٢ $^{-٠,٢}$

ص = ٢ $^{-٠,٢}$ × ٦٠٠٠٠ = ١٥٠٠٠ × ٢ $^{-٠,٢}$

$\frac{٦٠}{١٥}$ = ٢ $^{-٠,٢}$

٤ = ٢ $^{-٠,٢}$

٤ = ٢ $^{-٠,٢}$

٢ ^{٢} = ٢ $^{-٠,٢}$

ن = ١٠

س٧: ٢ ^{س} + ٢ ^{ص} = ٦

٤ $^{س+١}$ − ٤ $^{ص+١}$ = −٤٨

٤ ^{س} × ٤ − ٤ $^{ص+١}$ × ٤ = −٤٨

نفرض أنّ: ع = ٢ ^{س} ، ك = ٢ ^{ص}

ع + ك = ٦ ⟸ ك = ٦ − ع

٤ع ^{٢} − ٤ ك ^{٢} = −٤٨

٤ع ^{٢} − ٤ (٦ − ع) ^{٢} = −٤٨

٤ع ^{٢} − ٤ (٣٦ + ١٢ع + ع ^{٢}) = −٤٨

−٤٨ع − ١٤٤ = −٤٨ ⟸ ع = ٢ ، ك = ٤

س = ١ ، ص = ٢

س٨: أ) لـو $_{ب}$ ا = لـو $_{ج}$ ا × لـو $_{ب}$ ج (حيث: جـ > ٠ ، جـ ≠ ١)

البرهان: نفرض س = لـو $_{ج}$ ا، ومنها: ا = ج ^{س} ..... (١)

نفرض ص = لـو $_{ب}$ ج، ومنها: ج = ب ^{ص} ..... (٢)

بتعويض قيمة ج من (٢) في معادلة (١) ينتج: ا = ب $^{س ص}$ ومنها: لـو $_{ب}$ ا = س ص = لـو $_{ج}$ ا × لـو $_{ب}$ ج

ب) $\text{لـو}_{\text{ب}}\text{أ} = \frac{١}{\text{لـو}_{\text{أ}}\text{ب}}$

البرهان: $\text{لـو}_{\text{أ}}\text{أ} = \text{لـو}_{\text{ب}}\text{أ} \times \text{لـو}_{\text{أ}}\text{ب} = ١$ ومنها : $\text{لـو}_{\text{ب}}\text{أ} = \frac{١}{\text{لـو}_{\text{أ}}\text{ب}}$

جـ) $\text{لـو}_{\text{ب}^{٢}}\text{أ}^{٢} = \text{لـو}_{\text{ب}}\text{أ}$

البرهان:

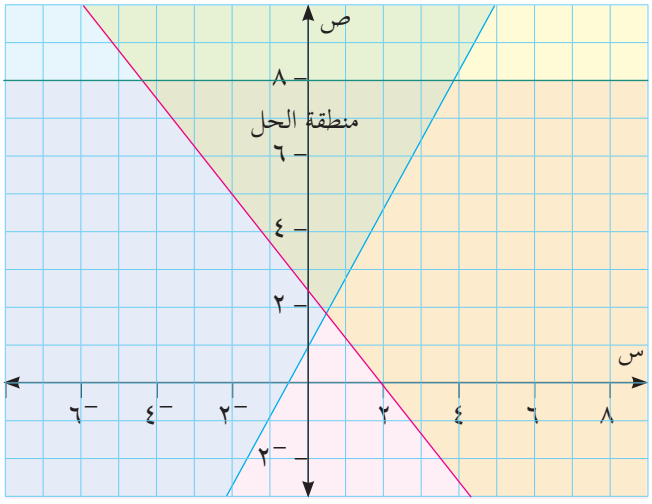
$\text{لـو}_{\text{ب}^{٢}}\text{أ}^{٢} = \text{لـو}_{\text{ب}}\text{أ}^{٢} \times \text{لـو}_{\text{ب}^{٢}}\text{ب}^{٢} = ٢\text{لـو}_{\text{ب}}\text{أ} \times \frac{١}{٢} = \text{لـو}_{\text{ب}}\text{أ}$

تمارين ومسائل: (٣ - ٥)

س١: ٢س + ١ ⩾ ص، ص ⩾ ٨ ، ٤س + ٣ص ⩽ ٨

س	٠	٠,٥-
ص	١	٠

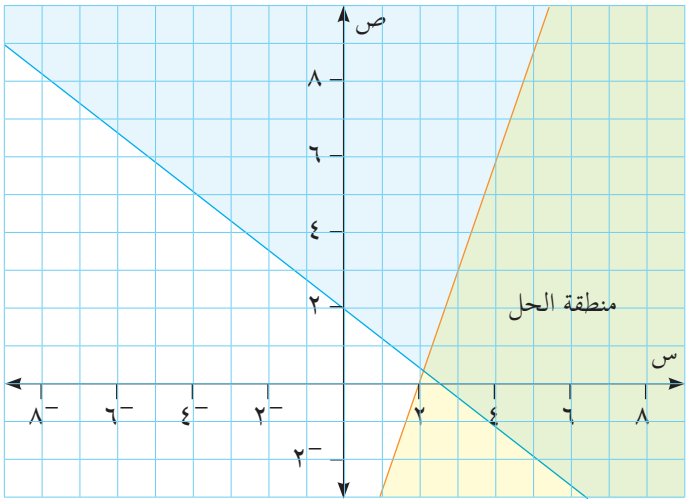
س	٠	٢
ص	٢,٦٦	٠



س٢: ٦س - ٢ص ⩽ ١٢ ، ٣س + ٤ص > ٨

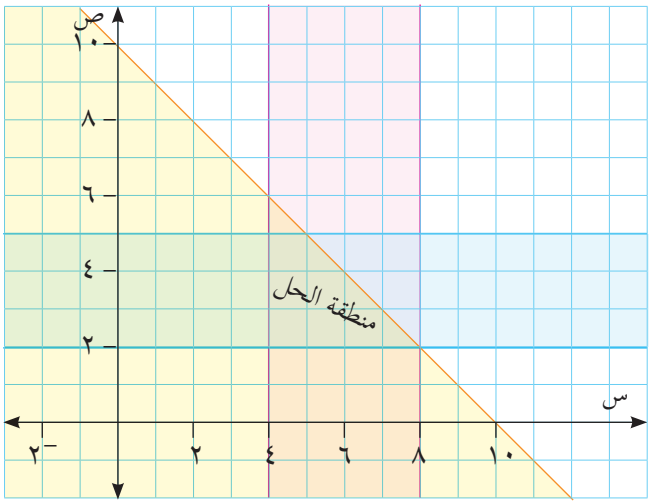
س	٠	٢
ص	٦-	٠

س	٠	٢,٦٦
ص	٢	٠



س٣: ٤ ⩽ س ⩽ ٨ ، ٢ ⩽ ص ⩽ ٥ ، س + ص ⩽ ١٠

س	٠	١٠
ص	١٠	٠



س٤: معادلة الخط المار بالنقطتين: (٠، ٦)، (٤، ٢)

ص = ٢ س − ٦ / المتباينة ص > ٢ س − ٦

معادلة الخط المار بالنقطتين: (٠، ٤)، (٤، ٢)

ص = $\frac{-١}{٢}$ س + ٤ / المتباينة ص ⩾ $\frac{-١}{٢}$ س + ٤

معادلة الخط المار بالنقطتين (٠، -٦)، (-٢، ٥)

ص = $\frac{-١١}{٢}$ س − ٦ / المتباينة ص ⩽ $\frac{-١١}{٢}$ س − ٦

تمارين ومسائل: (٣ - ٦)

س١: أ) إما ٦ – ٥س = –٨ أو ٦ – ٥س = ٨

١٤ = ٥س –٢ = ٥س

$س = \frac{١٤}{٥}$ $س = \frac{-٢}{٥}$

ب) ٥ | س + ٢ | – ١١ = ٤ ومنها إما: س+٢= ٣ أو: س+٢=–٣

ومنها: س=١ أو س= –٥

س٢: | ٢٥ – ٧ | = ٨

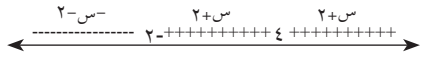
٢٥ – ٧ = ± ٨

٢٥ = ٧ ± ٨

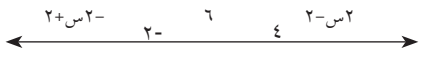
$٢ = \frac{-١}{٥}$ ، ٢ = ٣

س٣: | ٤ – س |

| س + ٢ |



| ٤ – س | + | س + ٢ |



إما: ٢س–٢=٦ ومنها: ٢س=٨ ومنها: س=٤

أو: ٦=٦

أو: –٢س+٢=٦ ومنها: –٢س=٤ ومنها: س=–٢

إذن: مجموعة الحل [–٢، ٤]

س٤: ٣ | س–٦٠ | = | س – ٨٠ |

بعد إعادة التعريف للقيمه المطلقة نلاحظ أنّ:

عندما: س < ٨٠

٣س–١٨٠ = س–٨٠ ومنها: ٢س=١٠٠، ومنها: س=٥٠ مرفوضة

عندما: ٨٠ ⩽ س ⩽ ٦٠

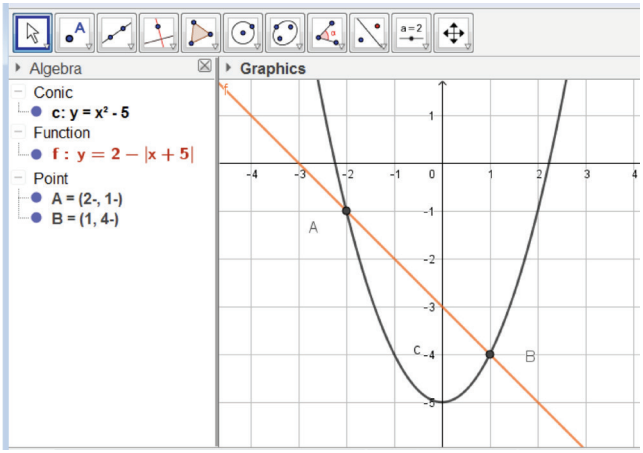
٣س–١٨٠ = –س+٨٠ ومنها: ٤س= ٢٦٠، ومنها: س =٦٥ مقبولة

عندما: س > ٦٠

–٣س+١٨٠ = –س+٨٠ ومنها: –٢س= –١٠٠، ومنها: س=٥٠ مقبولة

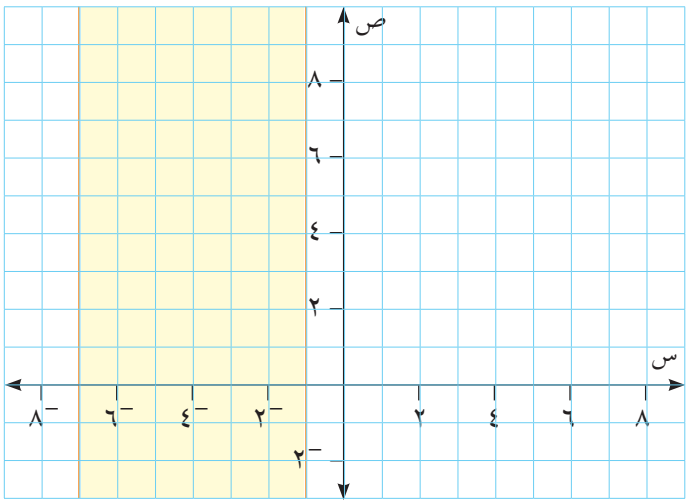
س٥: $س^{٢} - ٥ = ٢ - |س+٥|$، ومنها:

$٧ - س^{٢} = |س+٥|$ بإعادة التعريف والحل تكون نقاط التقاطع: (١، -٤)، (-٢، -١)



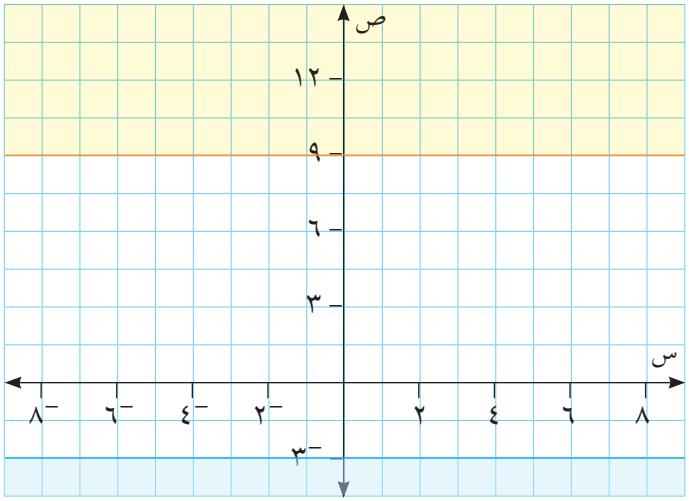
تمارين ومسائل: (٣ - ٧)

س١: $|١٢ + ٣س| \geq ٩ \Leftarrow -٩ \geq ١٢ + ٣س \geq ٩ \Leftarrow -٢١ \geq ٣س \geq -٣ \Leftarrow -٧ \geq س \geq -١$



س٢: $|٣ - ص| > ٦ \Leftarrow ٣ - ص > ٦$ أو: $٣ - ص < -٦$

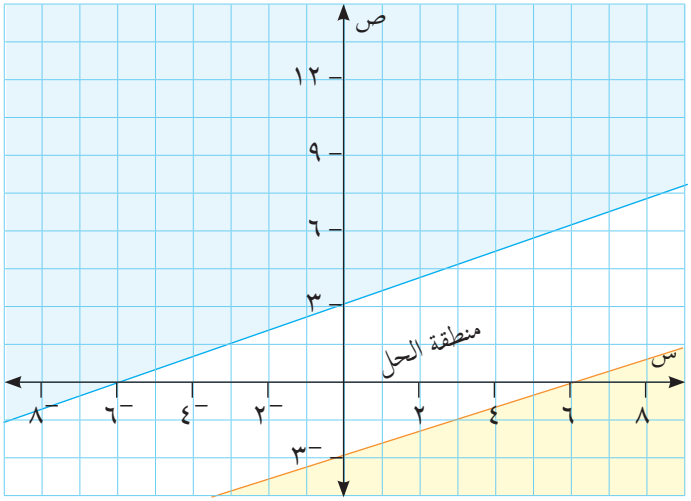
إما: $ص < -٣$ او $ص > ٩$



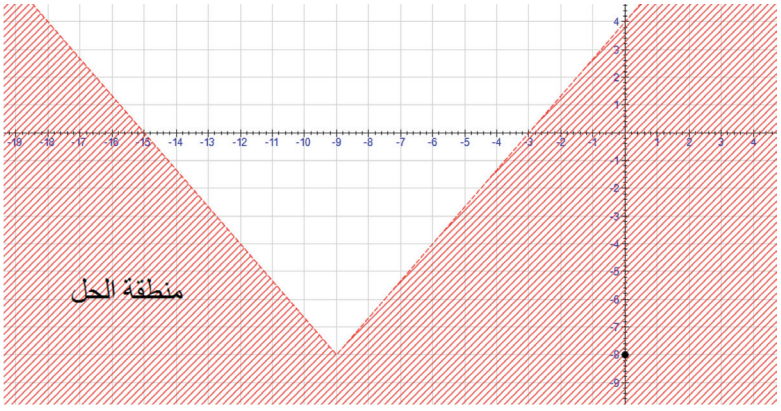
س٣: | س - ٢ص | > ٦

ومنها: -٦ > س - ٢ص

س - ٢ص > ٦



س٤:



س٥: المستقيم الأول يمر بالنقطتين (٤، ٠)، (٠، -٨)

معادلة الأول: ص-٠ = $\frac{-٨}{-٤}$(س-٤) ⟸ ص - ٢س = -٨

معادلة الثاني: ص-٠ = ٢(س+٤) ومنها: ص-٢س = ٨

بُعد النقطة عن المستقيم: ٢س-١ص-٨=٠

ف = $\frac{|-٨ + ٠ + -٨|}{\sqrt{٢^{١} + ٤^{٢}}} = \frac{١٦}{\sqrt{٥}}$

تمارين عامة الوحدة الثالثة

س١:

السؤال	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
الجواب	ج	ب	أ	د	ب	أ	ب	ج	أ	د

س٢: ن(س)= أس^{٢} +ب س+ج

ن(١)= أ+ب+ج= ١ .....(١)

ن(-١)= أ - ب+ج = -٥ .....(٢)

ن(٢)= ٤أ+٢ب +ج = ١٠ .....(٣)

بطرح المعادلة الثانية من الأولى ينتج: ٢ب = ٦، ومنها: ب = ٣

بجمع المعادلة الأولى مع الثانية ينتج: ٢أ + ٢ج= -٤ ومنها: أ + ج= -٢

وبطرح الأولى من الثالثة ينتج: ٣أ + ب =٩، ومنها: أ=٢

ج=-٢-٢=-٤

ق(س)= ٢س^{٢} +٣س-٤

س٣: | ٣س| + |س+١| ≥ ٥

بعد إعادة التعريف ينتج: ٤س + ١ (٠) -٢س + ١ (-١) -٤س - ١

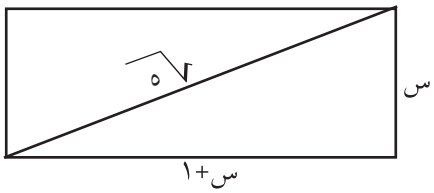
أولاً: س ≤ ٠ : ٤س+١≥ ٥ ومنها: س ≥ ١ ومنها: س ∈ [١،٠]

ثانياً: ٠ ≤ س ≤ -١ : -٢س+١≥ ٥ ومنها: س -٢ ومنها: س ∈ [-١،٠]

ثالثاً: س ≥ -١ : -٤س - ٥ ≥ ١ ومنها: س≤ -١,٥ ومنها: س ∈ [-١,٥،-١]

إذن: مجموعة الحل هي: س[-١,٥،١]

س٤: س+١



$(س+١)^{٢} + س^{٢} = ٥(\sqrt{٥})^{٢}$

$٢س^{٢} + ٢س - ٤ = ٠$

$س^{٢} + س - ٢ = ٠$ ومنها: $(س+٢)(س-١) = ٠$ ومنها:

إما: س= −٢ وتهمل أو س= ١

العرض = ١م والطول = ٢م

المساحة = ٢م^{٢} ، ومنها: التكلفة تساوي ٢× ٦٠ = ١٢٠ دينار

س٥: $س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥$

$٣س^{٢} - ٢ص^{٢} = ٣٠$

بضرب المعادلة الأولى في ٢ ، وجمعها مع المعادلة الثانية ينتج:

$٥س^{٢} = ٨٠$ ومنها: $س^{٢} = ١٦$ ومنها: س= ٤ تهمل السالبة.

بالتعويض في إحدى المعادلتين ينتج: ص= ٣ تهمل السالبة.

س٦: $(٢^{س})^{٢} - ٢^{س} \times \frac{١}{٨} - ٢^{س} \times \frac{١}{٤} + \frac{١}{٣٢} = ٠$

بفرض ص = $٢^{س}$ تصبح المعادلة:

$٣٢ص^{٢} - ١٢ص + ١ = ٠$ ومنها: $(٨ص-١)(٤ص-١) = ٠$.

ومنها إمّا: ص= $\frac{١}{٨}$ ، أو: ص= $\frac{١}{٤}$

ومنها: $٢^{س} = ٢^{-٣}$ أي ان س= −٣ أو: $٢^{س} = ٢^{-٢}$ أي أنّ: س =−٢

س٧: أ) $لـو_{٣}(س-٢)(س-٨) = ٣$ ومنها: $(س-٢)(س-٨) = ٢٧$

$س^{٢} - ١٠س - ١١ = ٠$ ومنها: $(س-١١)(س+١) = ٠$

إما: س= ١١ أو: س= −١ مرفوضة

ب) $لـو_{٢٧}(س-٢) + لـو_{٣}(س-٢) = ٤$

$\frac{لـو_{٣}(س-٢)}{لـو_{٣}\ ٢٧} + لـو_{٣}(س-٢) = ٤$

$\frac{١}{٣}\ لـو_{٣}(س-٢) + لـو_{٣}(س-٢) = ٤$

$\frac{٤}{٣}$ لـو$_{٣}$(س-٢) = ٤

س-٢ = ٢٧

س = ٢٩

س٨: | س - ص| ≥ ١٠، س > ٠، ص > ٠

-١٠≤س-ص≤١٠ ومنها -١٠≤ س-ص و س-ص≤١٠