# حلول الوحدة الرابعة: الاحتمالات والإحصاء

## تمارين ومسائل: (٤ - ١)

س١:

| السؤال | ١ | ٢ |
|---|---|---|
| رمز الإجابة الصحيحة | جـ | أ |

س٢: ١) المدى = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦}

٢) المدى = {٠، ١، ٢، ٣، ٤، ٥}

٣) المدى = {٢، ٣، ٤، ٦، ٨، ٩، ١٢}

٤) المدى = {٠، ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧ ، ٨، ٩، ١٠}

## تمارين ومسائل: (٤ - ٢) التوزيع الاحتمالي

س١:

| السؤال | ١ | ٢ | ٣ |
|---|---|---|---|
| رمز الإجابة الصحيحة | أ | د | ب |

س٢: أ) قيم المتغير العشوائي $س$ = {٠، ١، ٢، ٣}

ب) جدول التوزيع الاحتمالي:

| س | ٠ | ١ | ٢ | ٣ |
|---|---|---|---|---|
| ل(س) | $\frac{١}{٢٧}$ | $\frac{٦}{٢٧}$ | $\frac{١٢}{٢٧}$ | $\frac{٨}{٢٧}$ |

س٣: جدول التوزيع الاحتمالي:

| س | ٠ | ١ | ٢ | ٣ |
|---|---|---|---|---|
| ل(س) | $\frac{٥}{٨}$ | $\frac{١٥}{٥٦}$ | $\frac{٣٠}{٣٣٦}$ | $\frac{٦}{٣٣٦}$ |

## تمارين ومسائل: (٤ - ٣) التوقُّع

**س١:** التوزيع الاحتمالي:

| س | ٠ | ١ | ٢ | ٣ | ٤ | ٥ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ل(س) | $\frac{٦}{٣٦}$ | $\frac{١٠}{٣٦}$ | $\frac{٨}{٣٦}$ | $\frac{٦}{٣٦}$ | $\frac{٤}{٣٦}$ | $\frac{٢}{٣٦}$ |

ت (ن) = $\frac{٣٥}{١٨}$

---

**س٢:** نكتب التوزيع الاحتمالي كالآتي: {(-٢، أ)، (٣، ٠,١)، (٤، ب)} أو جدول

أ + ب = ٠,٩ ، ت(ن) = -٢أ + ٣ × ٠,١ + ٤ب = ١,٥ ، نحل المعادلتين فينتج: ب = ٠,٥

ل (س=٤) = ٠,٥

---

**س٣:** قيمة: أ = $\frac{١٢}{٢٥}$

(ت(٥٠ ن) = ٥٠ × $\frac{٢٣}{٢٥}$ = ٤٦

توقع مجموع الإجازات خلال ٥٠ يوم عمل = ٤٦ .

## تمارين ومسائل: (٤ - ٤) التوزيع ذو الحدين

**س١:**

| السؤال | ١ | ٢ | ٣ |
|---|---|---|---|
| رمز الإجابة الصحيحة | جـ | ب | د |

**س٢:** أ) ل(٠) = $\binom{٦}{٠}\left(\frac{١}{٣}\right)^{٠}\left(\frac{٢}{٣}\right)^{٦} = \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٦}$

ل(١) = $\binom{٦}{١}\left(\frac{١}{٣}\right)^{١}\left(\frac{٢}{٣}\right)^{٥}$

ل(س≤١) = ١ - ل(٠) = ١ - $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{٦}$

ب) ت (ن) = ٢

س٣: $ن = ٦$ ، $أ = \frac{٢}{٦} = \frac{١}{٣}$ ، $(١ - أ) = \frac{٢}{٣}$

أ) ل (عدد يقبل القسمة على ٣ في ٣ رميات فقط) $= \binom{٦}{٣} \left(\frac{١}{٣}\right)^{٣} \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٣}$.

ب) ل (عدد يقبل القسمة على ٣ في ٥ رميات على الأقل) = ل(س $\geq$ ٥) = ل(٥) + ل(٦)

$= \binom{٦}{٥} \left(\frac{١}{٣}\right)^{٥} \left(\frac{٢}{٣}\right)^{١} + \binom{٦}{٦} \left(\frac{١}{٣}\right)^{٦} \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٠}$

---

س٤: (احتمال اللون الأبيض) ل(ب) $= \frac{٣}{٤}$، (احتمال اللون الأحمر) ل(ع) $= \frac{١}{٤}$

أ) احتمال أن تكون بذرتان فقط ذات لون أبيض: ل(س=٢) $= \binom{٨}{٢} \left(\frac{٣}{٤}\right)^{٢} \left(\frac{١}{٤}\right)^{٦}$

ب) توقع عدد الكرات الحمراء $= ٨ \times \frac{١}{٤} = ٢$

---

س٥: (معطى ل (ص)= ٢ل(ع) ونعلم أن ل(ص) + ل(ع)= ١) ومنها نستنتج أنّ :

ل ( أصفر ) $= \frac{٢}{٣}$ ، ل ( أحمر ) $= \frac{١}{٣}$

ل(س $\leq$ ١) $= \frac{٢١١}{٢٤٣} \Leftarrow$ ١ - ل (٠) $= \frac{٢١١}{٢٤٣} \Leftarrow$ ل (٠) $= \binom{ن}{٠} \left(\frac{١}{٣}\right)^{٠} \left(\frac{٢}{٣}\right)^{ن} = \frac{٢١١}{٢٤٣} = \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٥}$

$\Leftarrow ن = ٥$ بذرات

## تمارين ومسائل: (٤ - ٥) العلامة المعيارية

س١: $ع = \frac{س - \overline{س}}{\sigma}$ ، $ع_{٥٧} = \frac{٥٧ - ٦٥}{٨} = \frac{-٨}{٨} = -١$ ، $ع_{٩١} = \frac{٩١ - ٦٥}{٨} = \frac{٢٦}{٨} = ٣,٢٥$

---

س٢: علامة سارة المعيارية في الكيمياء: $ع_{٧٢} = \frac{٧٢ - ٦٠}{٣} = \frac{١٢}{٣} = ٤$

علامة سارة المعيارية في الفيزياء: $ع_{٧٥} = \frac{٧٥ - ٧٠}{٢} = \frac{٥}{٢} = ٢,٥$

علامة سارة المعيارية في الأحياء: ع$_{٦٩}$ = $\frac{٦٨ - ٦٩}{٤}$ = $\frac{١}{٤}$ = ٠,٢٥

أداء سارة في الكيمياء أفضل من الفيزياء وأفضل من الأحياء ، وأداء سارة في الفيزياء أفضل من الأحياء.

---

**س٣:** مجموع العلامات المعيارية للتوزيع = صفر

∴ ٣ + ٢ل + −١ + ل + −٥ = صفر ⟸ ل = ١

---

**س٤:** أ) ع$_{٧٥}$ = $\frac{٧٥ - ٧٠}{٥}$ = $\frac{٥}{٥}$ = ١

ب) الوسط الحسابي بعد التعديل = −٢(٧٠) + ٣ = −١٣٧

الانحراف المعياري بعد التعديل = ٢(٥) = ١٠

العلامة ٧٥ بعد التعديل = −٢(٧٥) + ٣ = −١٤٧

إذن: العلامة المعيارية للقيمة ٧٥ بعد هذا التعديل = ع = $\frac{-١٤٧ + ١٣٧}{١٠}$ = $\frac{-١٠}{١٠}$ = −١

أو مباشرة العلامة المعيارية لا تتأثر بالجمع، ولكن تتأثر بالضرب في عدد سالب. (تتغير إشارة العلامة المعيارية فقط)

إذن: العلامة المعيارية للقيمة ٧٥ بعد هذا التعديل = −١

## تمارين ومسائل: (٤ - ٦) التوزيع الطبيعي (المعتدل)

**س١:** أ) ل(ع ⩽ ١,٢٥) = ٠,٨٩٤٤

ب) ل(ع > ٢,٤٨) = ١ − ٠,٩٩٣٤ = ٠,٠٠٦٦

ج) ل(ع < −١,٤٦) = ل(ع > ١,٤٦) = ٠,٩٢٧٩

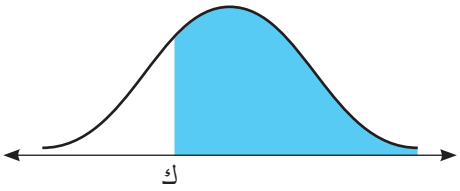
د) ل(−٢,٣٧ ⩽ ع ⩽ ١,٧) = ٠,٩٥٥٤ − ٠,٠٠٨٩ = ٠,٩٤٦٥

---

**س٢:** أ) ك تقع في الفترة الموجبة

ل(ع ⩽ ك) = ٠,٩٩٠٩ نبحث في الجدول عن المساحة ٠,٩٩٠٩ لنجد: ك = ٢,٣٦

ب) ك تقع في الفترة السالبة، كما هو موضّح في الشكل المقابل.




ل(ع > ك) = ٠,٩٤٩٥ ومنها

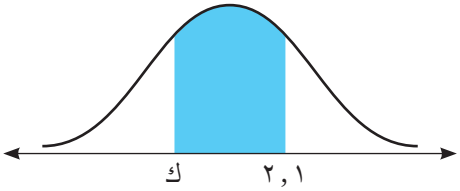
ل(ع < ك) = ١ – ٠,٩٤٩٦ = ٠,٠٥٠٥

نبحث في الجدول عن العدد ٠,٠٥٠٥ فنجد ك = –١,٦٤

ج) ك تقع في الفترة السالبة

ل(ع ⩽ ك)=٠,١٩٧٧ نبحث في الجدول عن المساحة ٠,١٩٧٧ لنجد ك= –٠,٨٥

د) ل(ك ⩽ ع ⩽ ١,٢) =٠,٢٩٠٦




ل(ع < ١,٢)– ل(ع < ك )= ٠,٢٩٠٦

ل(ع > ك) = ٠,٩٨٢١ – ٠,٢٩٠٦ =٠,٦٩١٥

ومنها: ك = ٠,٥

---

**س٣:** ل(ع ⩽ ك) = ٠,١٧٣٦ ومنها: ك = –٠,٩٤

ل(ك ⩽ ع ⩽ ١,٧)= ل(–٠,٩٤ ⩽ ع ⩽ ١,٧)= ل(ع < ١,٧) – ل (ع < –٠,٩٤ )

= ٠,٩٥٥٤ – ٠,١٧٣٦ =٠,٧٨١٨

---

**س٤:** أ) ل(س ⩽ ٥٠) = ل(ع ⩽ $\frac{٥٠ + ٦٠}{٥}$)= ل(ع ⩽ –٢) =٠,٠٢٢٨

ب) ل( ٥٥ ⩽ س ⩽ ٧٥) = ل( –١ ⩽ ع ⩽ ٣) = ل(ع ⩽ ٣)– ل(ع ⩽ –١ )

= ٠,٩٩٨٧ – ٠,١٥٨٧ =٠,٨٤

---

**س٥:** ل(س<٧٨) = ٠,٠٢٢٨ ومنها: ل(ع < $\frac{\mu - ٧٨}{٢}$) =٠,٠٢٢٨

ل(ع < $\frac{\mu - ٧٨}{٢}$ ) = ١ – ٠,٠٢٢٨ = ٠,٩٧٧٢

ومن الجدول نجد: ع = ٢

٢ = $\frac{\mu - ٧٨}{٢}$ ومنها: ٤ = μ – ٧٨ ومنها: μ = ٧٤

س٦: أ) ل(ع ⩽ ك) = ٠,١٠٥٦ ومنها: ل(ع ⩾ ك) = ١ - ٠,١٠٥٦ = ٠,٨٩٤٤

ك = ١,٢٥

ب) ل( س ⩾ ١٢) = ل(ع ⩾ $\frac{١٢ - ٨}{٢}$) = ل(ع ⩾ ٢) = ٠,٩٧٧٢

## تمارين ومسائل: (٤ - ٧) التطبيقات

س١: (احتمال أن تقل علامات الطلبة المعيارية عن - ٢,١٥) = ل(ع < -٢,١٥) = ٠,٠١٥٨

عدد الطلبة الذين تقل علاماتهم المعيارية عن - ٢,١٥ = الاحتمال × العدد الكلي

= ٠,٠١٥٨ × ١٠٠٠ = ١٥,٨ = ١٦ طالباً

---

س٢: أ) ل(س > ٧٥) = ل(ع > $\frac{٧٥ - ٦٩}{٤}$) = ل(ع > ١,٥) = ١ - ل(ع < ١,٥)

= ١ - ٠,٩٣٣٢ = ٠,٠٦٦٨

ب) ل( ٦٠ < س < ٧٠ ) = ل( -٢,٢٥ < ع < ٠,٢٥ ) = ل(ع < ٠,٢٥) - ل(ع < -٢,٢٥)

= ٠,٥٩٨٧ - ٠,٠١٢٢ = ٠,٥٨٦٥

ج) ل(س < ٦٩ ) = ل(ع < ٠ ) = ٠,٥ ،

ومنها: نسبة الطلاب الذين يحصلون على أقل من ٦٩ علامة = الاحتمال × ١٠٠٪ = ٠,٥ × ١٠٠٪ = ٥٠٪

---

س٣: أ) ل(س > ٢٢٠) = ل(ع > $\frac{٢٢٠ - ٢٠٠}{١٠}$) = ل(ع > ٢ ) = ١ - ل(ع < ٢ )

= ١ - ٠,٩٧٧٢ = ٠,٠٢٢٨

عدد الأسر التي تحصل على دخل شهري أعلى من ٢٢٠ ديناراً = ٢٠٠ × ٠,٠٢٢٨ = ٥ أسر .

ب) ل(س < ك) = ١٠٪ = ٠,١٠٠٠

ل(ع < $\frac{ك - ٢٠٠}{١٠}$) = ٠,١٠٠٠ ، $\frac{ك - ٢٠٠}{١٠}$ = -١,٢٨ ومنها : ك = ١٨٧,٢ ديناراً

س٤: ل(س ⩽ ك) = ٠,٠٥٠٠ ⟸ ل(ع ⩽ $\frac{\text{ك} - \mu}{\sigma}$) = ٠,٠٥٠٠

⟸ ١-ل(ع > $\frac{\text{ك} - \mu}{\sigma}$) = ٠,٠٥٠٠ ⟸ ل(ع > $\frac{\text{ك} - \mu}{\sigma}$) = ٠,٩٥٠٠

$\frac{\text{ك} - ٧٠}{١٠}$ = ١,٦٥ ⟸ ك = ٨٦,٥

## تمارين عامة الوحدة الرابعة

س١:

| رقم الفقرة | ١ | ٢ | ٣ | ٤ | ٥ |
|---|---|---|---|---|---|
| رمز الإجابة الصحيحة | أ | ب | د | ب | د |

س٢: إذا كان جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي ن هو:

| س | ٣ | ٨ | ٩ | ١٢ | ١٥ |
|---|---|---|---|---|---|
| ل (س) | أ | ب | ٠,٣ | ٣ب | أ٢ |

أ٣ + ٤ب + ٠,٣ = ١ ⟸ أ٣ + ٤ب = ٠,٧٠

ت (ن) = أ٣ + ٨ب + ٢,٧ + ٣٦ب + ١٣٠

ت (ن) = أ٣٣ + ٤٤ب + ٢,٧

ت (ن) = ١١ × (أ٣ + ٤ب) + ٢,٧

ت (ن) = ١١ × ٠,٧ + ٢,٧ = ١٠,٤

س٣: ل(ص*) = ٢ل (ك*) ، ل (ص*) + ل (ك*) = ١ ومنها: ل(ص*) = $\frac{٢}{٣}$ ، ل (ك*) = $\frac{١}{٣}$

ل(٠) = ل (ك* ك) = $\frac{١}{٣} \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{٦}$

ل(١) = ل (ص* ك) + ل(ك* ص) = $\frac{٢}{٣} \times \frac{١}{٢} + \frac{١}{٣} \times \frac{١}{٢} = \frac{٣}{٦}$

ل(٢) = ل (ص* ص) = $\frac{٢}{٣} \times \frac{١}{٢} = \frac{٢}{٦}$

| س | ٠ | ١ | ٢ |
|---|---|---|---|
| ل (س) | $\frac{١}{٦}$ | $\frac{٣}{٦}$ | $\frac{٢}{٦}$ |

ت (ن) = ٠ × $\frac{١}{٦}$ + ١ × $\frac{٣}{٦}$ + ٢ × $\frac{٣}{٦}$ = $\frac{٧}{٦}$

ت (١٠ن) = ١٠ × $\frac{٧}{٦}$ = $\frac{٧٠}{٦}$

---

**س٤:** ل(س ⩽ ١) ⩾ ٠,٧٩ ⟸ ١ − ل (٠) ⩾ ٠,٧٩ ⟸ ١ − $\binom{ن}{٠}$ $\left(\frac{١}{٢}\right)^{٠}$ $\left(\frac{١}{٢}\right)^{ن}$ ⩾ ٠,٧٩

$\left(\frac{١}{٢}\right)^{ن}$ ⩽ ٠,٢١ ، يتحقق عندما: ن ⩾ ٣.

---

**س٥:** ع = $\frac{\mu - ١٨٠}{٨}$ = ١,٢٥ ⟸ ١٨٠ − μ = ١٠ ⟸ μ = ١٧٠

---

**س٦:** ل(٢٠ < س < ٢٤) = $\left(\frac{٢٠ - ١٧,٥}{\frac{١}{٣}\ ٣} < ع < \frac{٢٤ - ١٧,٥}{\frac{١}{٣}\ ٣}\right)$

= ل (٠,٧٥ < س < ١,٩٥)

= ل (ع < ١,٩ × ٥) − ل (ع < ٠,٧٥)

= ٠,٩٧٤٤ − ٠,٧٧٣٤ = ٠,٢٠١٠

---

**س٧:** μ = ٧٦، σ = ٩

ل ( س < ك) = ٠,٨٦٤٣

ل (ع < $\frac{ك - ٧٦}{٩}$ ) = ٠,٨٦٤٣

$\frac{ك - ٧٦}{٩}$ = ١,١

ك − ٧٦ = ٩,٩ ومنها ك = ٨٥,٩ ⟸ ك ≈ ٨٦

# حلول الوحدة الخامسة: المتتاليات والمتسلسلات

## تمارين ومسائل: (٥ - ١)

**س١:** بوضع ن = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ينتج أنّ :

أ) $ع_1 = -٤ ، ع_2 = ١١ ، ع_3 = ٣٦ ، ع_4 = ٧١ ، ع_5 = ١١٦$

المتتالية : $(-٤ ، ١١ ، ٣٦ ، ٧١ ، ١١٦)$

ب) $ع_1 = ٣ ، ع_2 = -١ ، ع_3 = -٣ ، ع_4 = ٣ ، ع_5 = -٩$

المتتالية : $(٣ ، -١ ، -٣ ، ٣ ، -٩)$

---

**س٢:** أ) $ع_ن = \frac{ن + ١}{ن}$ حيث $ن \in ص^+$

ب) $ع_ن = ن^٣ + ١$ حيث $ن \in ص^+$

ج) $ع_ن = (-٢)^{ن+١}$ حيث $ن \in \{١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦\}$

---

**س٣:** $\because (ع_5)^2 = (٣ \times ٢^{٥-٥})^2 = ٩$

$ع_8 \times ع_2 = (٣ \times ٢^{٨-٥}) (٣ \times ٢^{٢-٥}) = ٢٤ \times \frac{٣}{٨} = ٩$

$\therefore (ع_5)^2 = ع_8 \times ع_2$

---

**س٤:** أ) متتالية عدد الشرائح غير المبيعة: ٩٢، ٨٣، ٧٣، ٦٢، ٥٠، ٣٧، ٢٣، ٨.

ب) اليوم الذي لا يحقق هذا النمط هو اليوم التاسع.

**س١:** أ) $ن = \infty$، $ع_ر = ك^{ر^٣}$ ، ∴ المتسلسلة هي: $\sum_{ر=١}^{\infty} ك^{ر^٣}$

ب) $ن = ٩٨$، $ع_ر = \frac{ر+٢}{ر+٣}$ ، ∴ المتسلسلة هي: $\sum_{ر=١}^{٩٨} \frac{ر+٢}{ر+٣}$

---

**س٢:** $\frac{٢ن+١}{٣} \sum_{ر=١}^{ن} ر = \frac{٢ن+١}{٣} \times \frac{ن(ن+١)}{٢} = \frac{ن(ن+١)(٢ن+١)}{٦} = \sum_{ر=١}^{ن} ر^٢$

---

**س٣:** أ) ∵ $\sum_{ر=١}^{٩٩٩} \left( لو \frac{ر}{ر+١} \right) = \sum_{ر=١}^{٩٩٩} \left( لو ر - لو(ر+١) \right) = (لو١ - لو٢) + (لو٢ - لو٣) + \ldots$

$+ (لو٩٨٩ - لو٩٩٩) + (لو٩٩٩ - لو١٠٠٠) = لو١ - لو١٠٠٠ = ٠ - ٣ = -٣$

ب) $\sum_{ر=١}^{١٠٠} \left( \frac{١}{ر} - \frac{١}{ر+١} \right) = \left( ١ - \frac{١}{٢} \right) + \left( \frac{١}{٢} - \frac{١}{٣} \right) + \ldots + \left( \frac{١}{١٠٠} - \frac{١}{١٠١} \right) = ١ - \frac{١}{١٠١} = \frac{١٠٠}{١٠١}$

---

**س٤:** أ) $\sum_{ر=١}^{٣} (ر^٢ + ٢ر + ٥) = \frac{٣(٣+١)(٢\times٣+١)}{٦} + ٢ \times \frac{٤\times٣}{٢} + ٣ \times ٥ = ٤١$

يمكن التعويض مباشرة

ب) $\sum_{ر=١}^{٨٥} (-١)^ر = (-١) + (١) + (-١) + \ldots + (-١)^{٨٥} = -١$

ج) $\dfrac{\sum_{ر=1}^{٤٠} ر^{٢}}{\sum_{ر=1}^{٤٠} ر^{٢}} = \dfrac{\frac{ن(ن+١)(٢ن+١)}{٦}}{\frac{ن(ن+١)}{٢}} = \dfrac{(١+ن٢)}{٦} = \dfrac{(١+٤٠\times٢)}{٦} = \dfrac{٨١}{٦} = ١٣,٥$

د) $\sum_{ر=1}^{٤٠} \left(\dfrac{ر}{٢}\right) = \dfrac{١}{٢} \times \dfrac{٤٠(٤٠+١)}{٢} = ٤١٠$

---

**س٥:** أ) المتسلسلة هي: $(١^{٢}+١٠)+(٢^{٢}+١٠)+(٣^{٢}+١٠)+\ldots+(ن^{٢}+١٠) = \sum_{ر=1}^{ن}(ر^{٢}+١٠)$

ب) ما قطعه في الدقائق الخمس الأولى:

$\sum_{ر=1}^{٥}(ر^{٢}+١٠) = (١^{٢}+١٠)+(٢^{٢}+١٠)+(٣^{٢}+١٠)+(٤^{٢}+١٠)+(٥^{٢}+١٠) = ١١+١٤+١٩+٢٦+٣٥ = ١٠٥$م

ما قطعه في الدقيقة العاشرة = $(١٠^{٢}+١٠) = ١١٠$م .

أي أنّ ما قطعه في الدقائق الخمس الأولى < ما قطعه في الدقيقة العاشرة.

## تمارين ومسائل: (٥ - ٣) المتتاليات الحسابية (العددية)

**س١:** أ) $\because ح_{٤} = -٣٣ \Longleftarrow ا + ٣ء = -٣٣$ ..... (١)

$\because ح_{٩} = -١٣ \Longleftarrow ا + ٨ء = -١٣$ ..... (٢)

من (١)، (٢) بالطرح ينتج أنّ:

$٥ء = ٢٠$ ، ومنها: $ء = ٤$ بالتعويض في المعادلة (١) ينتج أنّ:

$ا + ١٢ = -٣٣ \quad ا = -٤٥$

المتتالية : $-٤٥، -٤١، -٣٧، \ldots\ldots\ldots$

ب) $ع_ن > ٠ \Leftarrow ا + (ن-١)د > ٠$

$\Leftarrow -٤٥ + (ن-١)\ ٤ > ٠ \Leftarrow -٤٥ + ٤ن - ٤ > ٠$

$\Leftarrow ٤ن - ٤٩ > ٠ \Leftarrow ٤ن > ٤٩ \Leftarrow ن > ١٢\frac{١}{٤}$ ∴ $ع_{١٣}$ هو أول حد موجب.

---

**س٢:** ∵ $ع_٢ + ع_٣ = ١٥٢ \Leftarrow ا + د + ا + ٢د = ١٥٢$

$٢ا + ٣د = ١٥ \Leftarrow$ ..... (١)

∵ $ع_٦ - ع_٨ = ٨ \Leftarrow ا + ٥د - ا - ٧د = ٨$

$\Leftarrow -٢د = ٨$ ∴ $د = -٤$

بالتعـــــويض في المعـادلة رقـــم (١) ينتـــج أنّ :

$٢ا - ١٢ = ١٥٢ \Leftarrow ٢ا = ١٥٢ + ١٢ = ١٦٤ \Leftarrow ا = ٨٢$

∴ المتتـــــالية هي: ٨٢ ، ٧٨ ، ٧٤ ، .....

---

**س٣:** أ) $س - ٧ = ١٢٣ - (١٠س + ٩) \Leftarrow س - ٧ = ١٢٣ - ١٠س - ٩$

$\Leftarrow ١١ س = ١٣٠ - ٩ \Leftarrow ١١س = ١٢١ \Leftarrow س = ١١$

ب) $ع_ن = ا + (ن-١)د = ١٢٣$

$\Leftarrow ٧ + (ن-١) \times ٤ = ١٢٣ \Leftarrow ٧ + ٤ن - ٤ = ١٢٣$

$\Leftarrow ٤ن = ١٢٠ \Leftarrow ن = ٣٠$

---

**س٤:** أ) متتالية كميات في يومياً هي : ٨ ، ٨ ، ٨ ، ٨ ، ٨ ، ٠٠٠٠٠

بفرض أن عدد الأيام الذي يكون فيه ما تبقى من الرمل ١١٢م$^٣$ هـــو (ر) يوماً

∵ ٨ ر = ٢٠٠ - ١١٢ = ٨٨ $\Leftarrow$ ر = ١١ يوماً

ب) بوضع ٨ ر = ٢٠٠ $\Leftarrow$ ر = ٢٥ يوماً

س٥: ∵ $\frac{س_{٥}}{س_{ن-٢}} = \frac{٤}{٧}$ ، $\frac{٤}{٧} = \frac{١ + ٥ع}{١ + (ن-٢)ع}$ ⟸ ٤ + ٧ع = ٨ع − ٤ن ع + ٣٥

⟸ ٤ن ع − ٤٣ ع = ٣ ..... (١)

$ع_{ن+٢} = ١ + (ن+١)ع = ٣٧$

ن ع + ع ⟸ ٣٦ ..... (٢)

بضرب المعادلة رقم (٢) في −٤ وجمعها مع المعادله (١) ينتج أنّ:

⟸ ٤ن ع − ٤٣ ع = ٣

−٤ن ع + −٤ ع = −١٤٤

−٤٧ ع = −١٤١ ⟸ ع = ٣

بالتعويض في المعادلة (٢) ينتج أنّ: ن ٣ + ٣ = ٣٦ ومنها ن ٣ = ٣٣ ن = ١١ . ، ع = ٣

للتحقق : ١، ٤، ٧، ١٠، ١٣، ١٦، ١٩، ٢٢، ٢٥، ٢٨، ٣١، ٣٤، ٣٧

## تمارين ومسائل: (٥ - ٤) مجموع المتسلسلة الحسابية

س١: ∵ أ = ٣٠ ، ع = ٢٧ − ٣٠ = −٣ ، ن = ٢٠

$جـ_{٢٠} = \frac{ن}{٢}[٢أ + (ن-١)ع]$

$= ١٠ \times (٦٠ + ١٩ \times -٣) = ٣٠$ .

س٢: جـ١٠ الأولى = $\frac{١٠}{٢}$ (٢أ + ٩ع) = ١٢٠

⟸ ٢أ + ٩ د = ٢٤ ..... (١)

جـ٦ التالية = $\frac{٦}{٢}$ ($ع_{١١}$ ٢ + ٥ع) = ١٦٨

٣(٢(أ + ١٠ ع) + ٥ع) = ١٦٨

٦ أ + ٧٥ ع = ١٦٨ ÷ ٣

٦أ + ٢٥ع = ٥٦ .....(٢)

من (١)، (٢) بالطـــــرح ينتـــــــج أنّ:

١٦ع = ٣٢ ⟸ ع = ٢ ، نعوض في المعادلة (١) أ = ٣

المتسلسلة هـي : ٣ + ٥ + ٧ + .....

**س٣:** $أ = ٧$ ، $ل = -١٢$ ، $جـ_ن = -٥٠$

$\because جـ_ن = \frac{ن}{٢}(أ + ل) \Longleftarrow -٥٠ = \frac{ن}{٢}(٧ - ١٢)$

$\Longleftarrow -٥ن = -١٠٠ \Longleftarrow ن = ٢٠$ عدد حدود المتتالية ٢٠ حداً

$ع_{٢٠} = أ + ١٩ء \Longleftarrow -١٢ = ٧ + ١٩ء = -١٢$

$+ -١٢ \Longleftarrow -١٩ = ١٩ء \quad ء = -١$

المتسلسلة هي : $٧ + ٦ + ٥ + .....$

---

**س٤:** $ن = ٢٥$ ، الحد الأوسط هو: $ع_{١٣} = ٣٨$ ، $ع_{٢٥} + ع_{٢٤} + ع_{٢٣} = ٢١٣$

$\because ع_{١٣} = ٣٨ \quad أ + ١٢ء = ٣٨ ..... (١)$

$ع_{٢٥} + ع_{٢٤} + ع_{٢٣} = أ + ٢٤ء + أ + ٢٣ء + أ + ٢٢ء = ٢١٣$

$\Longleftarrow (٣أ + ٦٩ء = ٢١٣) / ٣$

$\Longleftarrow أ + ٢٣ء = ٧١ ..... (٢)$

من (٢)، (١) بالطرح ينتـج أنّ:

$١١ء = ٣٣$ ومنها: $ء = ٣$ بالتعويض في المعادلة رقم (١) ينتج أنّ:

$أ + ١٢ \times ٣ = ٣٨ \Longleftarrow أ = ٣٨ - ٣٦ = ٢$

المتسلسلة هي: $٢ + ٥ + ٨ + ..... + ٧٤$

$جـ_ن = \frac{ن}{٢}(أ + ل) = \frac{٢٥}{٢}(٢ + ٧٤) = ٧٦ \times \frac{٢٥}{٢} = ٩٥٠$ **أو**

$\because جـ_ن = \frac{ن}{٢}(٢أ + (ن - ١)ء) = \frac{٢٥}{٢}(٢ \times ٢ + ٢٤ \times ٣) = ٧٦ \times \frac{٢٥}{٢} = ٩٥٠$

---

**س٥:**

$$\frac{\sum_{ر=١}^{٢ن} (٦ + ٤ر)}{\sum_{ر=١}^{ن} (١ + ٢ر)} = \frac{(٦ \times ٢ن) + \frac{٤ \times ٢ن(٢ن + ١)}{٢}}{ن + \frac{٢ن(ن + ١)}{٢}}$$

$$= \frac{٨ن^{٢} + ١٦ن}{٢ن^{٢} + ٢ن} = \frac{٨(٢ن^{٢} + ن)}{٢ن^{٢} + ٢ن} = ٨$$

**حل آخر:**

البسط = $\sum_{ر=1}^{2ن}$ (٦ + ٤ر) = ١٠ + ١٤ + ١٨ + ... + (٦ + ٨ن) مجموع متتالية حسابية

فيها: أ = ١٠ ، ء = ٤ ، عدد حدودها: ٢ن

⟸ البسط = $\frac{٢ن}{٢}$ (أ+ل) = $\frac{٢ن}{٢}$ (١٠ + ٦ + ٨ن) = ن (١٦ + ٨ن) = ٨ن (٢ + ن) ..... (١)

المقام = $\sum_{ر=1}^{ن}$ (١ + ٢ر) = ٣ + ٥ + ٧ + ... + (١ + ٢ن) =

$\frac{ن}{٢}$ (أ+ل) = $\frac{ن}{٢}$ (٣ + ١ + ٢ن) = $\frac{ن}{٢}$ (٤ + ٢ن) = ن (٢ + ن) ..... (٢)

من (١)، (٢) ينتج أنّ المقدار: $\frac{\sum_{ر=1}^{2ن} (٦ + ٤ر)}{\sum_{ر=1}^{ن} (١ + ٢ر)}$ = $\frac{٨ن (٢ + ن)}{ن (٢ + ن)}$ = ٨

**تمارين ومسائل: (٥ - ٥) المتتالية الهندسية**

س٢: ∵ ع$_{١}$ + ع$_{٢}$ = ١٢ ⟸ أ + أر = ١٢ ⟸ أ(١ + ر) = ١٢ ..... (١)

∵ ع$_{٣}$ + ع$_{٤}$ = ١٠٨ ⟸ أر$^{٢}$ + أر$^{٣}$ = ١٢ ⟸ أر$^{٢}$ (١ + ر) = ١٠٨ ..... (٢)

بقسمة (٢) على (١) ينتج أنّ: ⟸ $\frac{أر^{٢}(١ + ر)}{أ (١ + ر)}$ = $\frac{١٠٨}{١٢}$ ⟸ ر = ± ٣

أولاً: عندما: ر = ٣ ⟸ أ + أ٣ = ١٢ ⟸ أ٤ = ١٢ ⟸ أ = ٣

المتتالية هي : ٣، ٩، ٢٧، .....

ثانياً: عندما: ر = −٣ ⟸ أ −أ٣ = ١٢ ⟸ −أ٢ = ١٢ ⟸ أ = −٦

المتتالية هي : −٦، ١٨، −٥٤، .....

**س٣:** بفرض أنّ هذه الأعداد هي : أ، أر، أر$^{٢}$

∵ أ + أر + أر$^{٢}$ = ٣٥

أ( ١ + ر + ر$^{٢}$ ) = ٣٥ ..... (١)

أ + أر + أر$^{٢}$ ، حسابية ⟸ أ + أر$^{٢}$ = ٧ + ٢أر ⟸ أ + ١٢ = ٢أر + ٧

∵ أر = $\frac{\text{أ} + ١٢}{٢}$ = أ + ٦ ⟸

⟸ أ ر$^{٢}$ − ٢أر + أ = ٥ ⟸ أ ( ر$^{٢}$ − ٢ر + ١ ) = ٥ ..... (٢)

من (٢)، (١) بالقسمة ينتج أنّ:

$\frac{\text{أ}(ر^{٢} - ٢ر + ١)}{\text{أ}(ر^{٢} + ر + ١)} = \frac{٥}{٣٥}$ ⟸ $\frac{(ر^{٢} - ٢ر + ١)}{(ر^{٢} + ر + ١)} = \frac{١}{٧}$ ⟸ ٧ × (ر$^{٢}$ − ٢ر + ١) = ١ × (ر$^{٢}$ + ر + ١)

٧ر$^{٢}$ − ١٤ر + ٧ = ر$^{٢}$ + ر + ١ ⟸ ٦ر$^{٢}$ − ١٥ر + ٦ = ٠

(٦ر − ٣)(ر − ٢) = ٠ ⟸ ر = $\frac{١}{٢}$ ، ر = ٢

بالتعويض في المعادلة رقم (١) ينتج أنّ:

أولاً: عندما: ر = $\frac{١}{٢}$

أ( ١ + $\frac{١}{٢}$ + ($\frac{١}{٢}$)$^{٢}$ ) = ٣٥ ⟸ أ $\frac{٧}{٤}$ = ٣٥ ⟸ أ = ٢٠

∴ الأعداد هي: ٢٠ ، ١٠ ، ٥

ثانياً: عندما: ر = ٢ بالتعويض في المعادلة رقم (١) ينتج أنّ :

أ ( ١ + ٢ + ٤ ) = ٣٥ ⟸ ٧أ = ٣٥ ⟸ أ = ٥

∴ الأعداد هي: ٥ ، ١٠ ، ٢٠

---

**س٤:** العامل الأول

تكون متتالية حسابية فيها: أ = ٥٠٠٠ ، ء = ٥٠

راتب العامل الأول في السنة الخامسة والعشرين هو:

ع$_{٢٥}$ = أ + ٢٤ء = ٥٠٠٠ + ٢٤ × ٥٠ = ٦٢٠٠ دينار .

الموظف الثاني

تكون متتالية هندسية فيها: أ = ٥٠٠٠ ، ر = ١,٠٥

راتب العامل الثاني في السنة الخامسة والعشرين هو:

ع$_{٢٥}$ = أ × ر$^{٢٤}$ = ٥٠٠٠ × (١,٠٥)$^{٢٤}$ = ١٦١٢٥,٥ دينار

ثانياً: بفرض أنّ ($\overline{ع}$) هي مقدار العلاوة السنوية التي تجعل راتب العامل الأول = راتب العامل الثاني في السنه الخامسة العشرين.

$\Leftarrow$ أ + ٢٤ $\overline{ع}$ = ١٦١٢٦,٥ $\Leftarrow$ ٥٠٠٠ + ٢٤ $\overline{ع}$ = ١٦١٢٦,٥

$\Leftarrow$ $\overline{ع}$ = ٤٦٣,٦ دينار

## تمارين ومسائل: (٥ - ٦) المتتالية الهندسية المنتهية ومجموعها

**س١:** أ = ١، ل = ٦٤ ، جـ$_{ن}$ = ٨٥

$\because$ جـ$_{ن}$ = $\frac{ل ر - أ}{ر - ١}$ $\Leftarrow$ ٨٥ = $\frac{٦٤ ر - أ}{ر - ١}$ $\Leftarrow$ ٨٥ ر - ٨٥ = ٦٤ ر - ١ = ٨٥ - ١

$\Leftarrow$ ٢١ ر = ٨٤ $\therefore$ ر = ٤

---

**س٢:** جـ$_{ن}$ = ٣٩٠٥ ، ل = ٣١٢٥ ، ر = ٥ ، أ = ؟ ، ن = ؟

١) $\because$ جـ$_{ن}$ = $\frac{ل ر - أ}{ر - ١}$ $\Leftarrow$ ٣٩٠٥ = $\frac{٣١٢٥ \times ٥ - أ}{٥ - ١}$ $\Leftarrow$ ١٥٦٢٥ - أ = ١٥٦٢٠ $\Leftarrow$ أ = ٥

٢) $\because$ ل = أ ر$^{ن-١}$ $\Leftarrow$ ٣١٢٥ = ٥ × ٥$^{ن-١}$ $\Leftarrow$ ٥$^{ن}$ = ٣١٢٥ $\Leftarrow$ ٥$^{ن}$ = ٥$^{٥}$ $\Leftarrow$ ن = ٥

---

**س٣:** $\because$ $\sum_{ر=١}^{١٠}$ ٣ ر$^{-٨}$ = ٣$^{-٧}$ + ٣$^{-٦}$ + ٣$^{-٥}$ + ... ٣$^{٢}$ متسلسلة هندسية فيها:

أ = ٣$^{-٧}$ ، ر = ٣ ، ن = ١٠

$\because$ جـ$_{ن}$ = $\frac{أ (ر^{ن} - ١)}{ر - ١}$ = $\frac{٣^{-٧}(٣^{-١٠} - ١)}{٣ - ١}$ = $\frac{٣^{-٧} \times ٥٩٠٤٨}{٢}$ ≈ ١٣,٥

---

**س٤:** $\because$ $\frac{أ ر + أ ر^{٢}}{٢}$ = ٥ $\Leftarrow$ أ ر (١ + ر$^{٢}$) = ١٠ ..... (١)

$\because$ $\sqrt{أ ر \times أ ر^{٣}}$ = ٤ $\Leftarrow$ أ ر$^{٢}$ = ٤ ..... (٢)

من (١)، (٢) بالقسمة ينتج أنّ:

$\frac{\cancel{أ}\,ر(١+ر^{٢})}{\cancel{أ}\,ر^{٢}} = \frac{\cancel{١٠}^{٥}}{\cancel{٢٤}} \Leftarrow \frac{(١+ر^{٢})}{ر} = \frac{٥}{٢} \Leftarrow ٢ر^{٢}+٢=٥ر$

$\Leftarrow ٢ر^{٢}-٥ر+٢=٠ \Leftarrow (٢ر-١)(ر-٢)=٠$ ومنها: $ر=\frac{١}{٢}$ ، $ر=٢$

أولاً: عندما $ر=\frac{١}{٢}$ بالتعويض في المعادلة رقم (٢) ينتج أنّ: $أ=١٦$

المتسلسلة هي: ١٦ + ٨ + ٤ + .....

$جـ_{١٠} = \frac{أ(ر^{١٠}-١)}{ر-١} = \frac{(\frac{١}{٢})^{١٠}-١)(١٦}{\frac{١}{٢}-١} = \frac{١٦٣٢}{}$ = _____

ثانياً: $ر=٢$ بالتعويض في المعادلة رقم (٢) ينتج أنّ: $أ=١$

المتسلسلة هي : ١ + ٢ + ٤ + .....

$جـ_{١٠} = \frac{أ(ر^{١٠}-١)}{ر-١} = \frac{(٢)^{١٠}-١)١}{٢-١} = ١٠٢٣$

---

**س٥:** أ) متتالية ارتفاعات الكرة بعد الصدمات ٦، $\frac{٩}{٢}$ ، $\frac{٢٧}{٨}$ ، .... تكون متسلسلة هندسية فيه $أ=٦$، $ر=\frac{٣}{٤}$

ارتفاع الكرة بعد الصدمة السادسة: $ع_{٦} = أر^{٥} = ٦(\frac{٣}{٤})^{٥} = \frac{٧٢٩}{٥١٢}$.

متتالية الارتفاعات: ٨، ٦، $\frac{٩}{٢}$ ، $\frac{٢٧}{٨}$ ، $\frac{٨١}{٣٢}$

ب) $جـ_{ن} = \frac{٨((\frac{٣}{٤})^{ن}-١)}{\frac{٣}{٤}-١} = \frac{٧٨١}{٣٢}$ ومنها : $(\frac{٣}{٤})^{ن} = (\frac{٣}{٤})^{٥} \Leftarrow ن=٥$ وهي بعد الصدمة الرابعة.

---

**س٥:** متسلسلة التأرجح هي : ٨,١ ، ٢,٧ ، ٠,٩ ، ٠,٣ ، .... متسلسلة هندسية $أ=٨,١$، $ر=\frac{١}{٣}$

$جـ_{٥} = \frac{٨,١((\frac{١}{٣})^{٥}-١)}{\frac{١}{٣}-١} = ١٢,١$ سم.

**س١:**

| رقم الفقرة | ١ | ٢ | ٣ | ٤ | ٥ | ٦ | ٧ | ٨ | ٩ | ١٠ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| رمز الإجابة الصحيحة | ب | ب | ج | أ | ب | أ | د | ب | ج | ج |

**س٢:** $أ = ٣$، $ل = ١٥٣٦$ ، $جـ_ن = ٣٠٦٩$

$\because جـ_ن = \frac{ل ر - أ}{ر - ١} \Leftarrow ٣٠٦٩ = \frac{١٥٣٦ \times ر - ٣}{ر - ١} \Leftarrow ٣٠٦٩ ر - ٣٠٦٩ = ١٥٣٦ ر - ٣$

$\Leftarrow ٣٠٦٩ ر - ١٥٣٦ ر = ٣٠٦٩ - ٣ \Leftarrow ١٥٣٣ ر = ٣٠٦٦ \Leftarrow \therefore ر = ٢$

**س٣:** $أ = ٢$ ، $ر = ٢$ ، $ع_ن = ٣٢$ ، $ن = ٨$

$جـ_٨ = \frac{ع_ن (ر^٨ - ١)}{ر - ١} = \frac{٣٢ (٢^٨ - ١)}{٢ - ١} = ٨١٦٠$

**س٤:** ب وسط حسابي بين أ، جـ ∴ أ، ب، جـ في توالٍ حسابي

∴ ب = أ + ء ، جـ = أ + ٢ ء

∴ المقدار: $\frac{ب + ٢أ}{ب - جـ} + \frac{ب + ٢ جـ}{أ - ب} = \frac{أ + ء + ٢أ}{٢ء - أ - ء + أ} + \frac{أ + ٢ء + ٢أ + ٤ء}{أ + ء - أ} = \frac{٣أ + ٣ء}{-ء} + \frac{٣أ + ٥ء}{ء} = \frac{٤ء}{ء} = ٤$

الحدود فردية الرتبة (٣، ٧، ١١، ..... ، ٥١) ١٣ حدا

الحدود زوجية الرتبة (١١، ٢١، ٣١، ..... ، ١٢١) ١٢ حداً

$جـ_{٢٥} = \frac{٢٥}{٢} (جـ_١ \text{ للحدود الفردية الرتبة}) + (جـ_{١٢} \text{ للحدود الزوجية الرتبة})$

س٦: $\because و_٤ - و_٢ = ٨٤ \Leftarrow ا ر^٤ - ا ر^٢ = ٨٤$

$\Leftarrow ا ر^٢ (ر^٢ - ١) = ٨٤$ ..... (١)

$\because و_٣$ $ا ر^٣ = ٥٦$ ..... (٢)

بقسمة (١) على (٢) ينتج أنّ: $\frac{ا ر^٢ (ر^٢ - ١)}{ا ر^٣} = \frac{٨٤}{٥٦} \Leftarrow \frac{(ر^٢ - ١)}{ر} = \frac{٣}{٢} \Leftarrow ٢ ر^٢ - ٢ = ٣ ر$

$\Leftarrow ٢ ر^٢ - ٣ ر - ٢ = ٠ \Leftarrow (ر - ٢)(٢ ر + ١) = ٠ \Leftarrow ر = ٢ ، ر = -\frac{١}{٢}$

أولاً : عندما ر = ٢ بالتعويض في المعادلة (١) ينتج أنّ: $٨ ا = ٥٦$

$ا = ٧$ ∴ الأوساط هي: ١٤، ٢٨، ٥٦، ١١٢

ثانياً: عندما: $ر = -\frac{١}{٢}$ بالتعويض في المعادلة (١) ينتج أنّ:

$ا \times (-\frac{١}{٢})^٣ = ٥٦ \Leftarrow ا = -٨ \times ٥٦ = -٤٤٨$

$\Leftarrow$ الأوساط هي: ٢٢٤، -١١٢، ٥٦، -٢٨

---

س٧: $\because$ جـ$_٦$ الأولى = ٩ جـ$_٣$ الأولى

$\frac{ا \times (ر^٦ - ١)}{ر - ١} = ٩ \Leftarrow \frac{ا \times (ر^٣ - ١)}{ر - ١} \Leftarrow (ر^٦ - ١) = ٩ (ر^٣ - ١) \Leftarrow (ر^٣ - ١)(ر^٣ + ١) = ٩ (ر^٣ - ١)$

$\Leftarrow ر^٣ = ٨ \Leftarrow ر = ٢$

$\because ع_{١٠} = ا \times ٢^٩ = ٦٤ \Leftarrow ا = \frac{١}{٨}$

المتتالية هي: $\frac{١}{٨}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، .....

---

المتبقي: ٥٠، ٤٠، ٣٢، ..... متتالية هندسية $ا = ٥٠$ ، $ر = \frac{٤}{٥}$

$\because ع_٦ = ا \times ر^٥ = ٥٠ (٠,٨)^٥ = ١٦,٣٨٤$

# حلول الوحدة السادسة: القطوع المخروطية

## تمارين ومسائل: (٦ - ١) القطع المكافئ

**س١:** أ) ص$^{٢}$ = −٤س هذا قطع مكافئ مفتوح لليسار ، فيه: −٤أ = −٤ ، أ = ١ ، إحداثيات الرأس (٠ ، ٠)، البؤرة (−١ ، ٠)، معادلة الدليل س = ١ ، معادلة محور التماثل ص = ٠ (محور السينات).

ب) س$^{٢}$ = −٨ ص هذا قطع مكافئ مفتوح للأسفل ، فيه: −٤أ = −٨ ، أ = ٢، إحداثيات الرأس (٠ ، ٠)، البؤرة (٠ ، − ٢)، معادلة الدليل ص = ٢ ، معادلة محور التماثل س = ٠ (محور الصادات).

---

**س٢:** القطع يمر بالنقطة (−٣ ، ٦) ومحور تماثله محور السينات ⟵ مفتوح جهة اليسار

معادلته ص$^{٢}$ = −٤أ س ، يمر منحناه بالنقطة (−٣ ، ٦)

إذن: ٣٦ = ١٢أ ، ومنها: أ = ٣ المعادلة ص$^{٢}$ = −١٢س

---

**س٣:** معادلة هذا القطع المكافئ هي: ص$^{٢}$ = ٤أ س، إحداثيات البؤرة (أ ، ٠)

ف$^{٢}$ =(س$_{١}$ −أ)$^{٢}$ + (٦ − ٠)$^{٢}$ = ١٠٠ ، إذن: (س$_{١}$ −أ)$^{٢}$= ٦٤ ،

(س$_{١}$ −أ)= ± ٨

س$_{١}$= أ ± ٨

لكن: (٦)$^{٢}$ = ٤أ س$_{١}$

إما: ٣٦ = ٤أ ( أ + ٨) ومنها: أ$^{٢}$+ ٨أ −٩ = ٠ ، (أ+٩) (أ−١) = ٠

أ = −٩ (قيمة مرفوضة ) ، أ = ١ (مقبولة) ، إذن: ص$^{٢}$ = ٤س

أو: ٣٦ = ٤أ ( أ − ٨) ومنها: أ$^{٢}$ − ٨أ −٩ = ٠ ، ( أ−٩) ( أ+١)=٠

أ = −١ (قيمة مرفوضة ) ، أ = ٩ (مقبولة) ، إذن: ص$^{٢}$ = ٣٦س

---

**س٤:** منحنى القطع المكافئ يمر بالنقطة (٢، ٨) وهي في الربع الأول وهناك احتمالان:

مفتوح لأعلى ، مفتوح جهة اليمين

أولاً: مفتوح لأعلى

س$^{٢}$ = ٤أ ص ⟵ ٤ = ٣٢أ ⟵ أ = $\frac{١}{٨}$ معادلة القطع المكافئ هي: س$^{٢}$ = $\frac{١}{٢}$ ص

ثانياً: مفتوح جهة اليمين

ص$^{٢}$ = ٤أ س ⟵ ٦٤ = ٨أ ⟵ أ = ٨ معادلة القطع المكافئ هي: ص$^{٢}$ = ٣٢ س

$\frac{٤}{\text{قا}^{٢}(٢\text{هـ})} = \frac{٤}{\text{قا}^{٢}(٢\text{هـ})}$ = ٤ جتا$^{٢}$ (٢هـ) ..... (١)

(٢) من (١) ، (٢) ينتج أن

س = $\frac{\text{ظا}^{٢}(٢\text{هـ})}{\text{ظا}^{٢}(٢\text{هـ}) + ١}$

س = ٤ص$^{٢}$ ⟵ ص$^{٢}$ = $\frac{١}{٤}$ س

## تمارين ومسائل: (٦ - ٢) القطع الناقص

**س١:**

| رقم الفقرة | ١ | ٢ | ٣ |
|---|---|---|---|
| رمز الإجابة الصحيحة | جـ | أ | ب |

**س٢:** نكتب القطع على الصورة القياسية: $\frac{\text{س}^{٢}}{\frac{١}{٤}} + \frac{\text{ص}^{٢}}{\frac{١}{٩}} = ١$ ، إذن: هذا قطع ناقص سيني، فيه:

أ = $\frac{١}{٢}$، ب = $\frac{١}{٣}$، جـ = $\frac{\sqrt{٥}}{٦}$

إحداثيات الرأسين ($\pm\frac{١}{٢}$، ٠)، إحداثيات البؤرتين ($\pm\frac{\sqrt{٥}}{٦}$، ٠)

طول المحور الأكبر = ٢أ = ١ ، طول المحور الأصغر = ٢ب = $\frac{٢}{٣}$

معادلة المحور الأكبر ( محور السينات ) ⟵ ص = صفر

معادلة المحور الأصغر ( محور الصادات ) ⟵ س = صفر

**س٣:** البُعد بين الرأس القريب والبؤرة = أ − جـ = ٢

البعد بين الرأس البعيد والبؤرة = أ + جـ = ٨

بحل هذا النظام ينتج أنّ: أ = ٥ ، جـ = ٣ ، ب = ٤

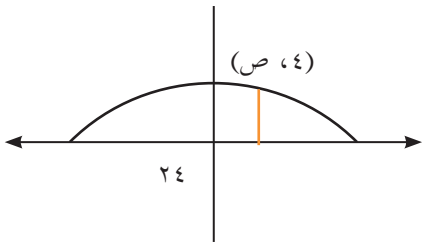
معادلة القطع الناقص الصادي: $\frac{\text{ص}^{٢}}{٢٥} + \frac{\text{س}^{٢}}{١٦} = ١$

**س٤:** المحل الهندسي هو قطع ناقص سيني، في: ٢ أ = ١٢ ومنها: أ = ٦، البؤرتان (± ٥، ٠) ، ومنها: جـ = ٥، إذن: ب = $\sqrt{١١}$

معادلة هذا القطع هي: $\frac{س^{٢}}{٣٦} + \frac{ص^{٢}}{١١} = ١$

---

**س٥:** المحور الأكبر أفقي ← قطع ناقص سيني




٢ أ = ٢٤ ← أ = ١٤٤

أعلى نقطة تبعد ٦ م ← ب = ٦ ، ب$^{٢}$ = ٣٦

معادلة القطع الناقص السيني: $\frac{س^{٢}}{١٤٤} + \frac{ص^{٢}}{٣٦} = ١$

عندما: س = ٤ ← $\frac{٤^{٢}}{١٤٤} + \frac{ص^{٢}}{٣٦} = ١$ ← ص$^{٢}$ = ٣٢ ← ص = $\sqrt{٣٢}$ = ٤ $\sqrt{٢}$ متر.

## تمارين ومسائل: (٦ - ٣) القطع الزائد

**س١:** أ) ٩س$^{٢}$ − ص$^{٢}$ = ٣٦ ومنها: $\frac{س^{٢}}{٤} - \frac{ص^{٢}}{٣٦} = ١$ وهذا قطع زائد سيني فيه:

أ = ٢ ، ب = ٦ ، جـ = $\sqrt{٤٠}$ ، البؤرتان ( ± $\sqrt{٤٠}$ ، ٠) ،

الرأسان (± ٢، ٠) ، طول المحور القاطع = ٢أ = ٤ ، طول المحور المرافق = ٢ب = ١٢

الاختلاف المركزي = هـ = $\frac{جـ}{أ} = \frac{\sqrt{١٠ \times ٢}}{٢} = \sqrt{١٠}$

ب) ٦ص$^{٢}$ − ٢س$^{٢}$ = ٣ ومنها: $\frac{ص^{٢}}{\frac{١}{٢}} - \frac{س^{٢}}{\frac{٣}{٢}} = ١$ ،وهذا قطع زائد صادي فيه:

أ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، ب = $\frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٢}}$ ، جـ$^{٢}$ = $\frac{١}{٢} + \frac{٣}{٢}$ = ٢ ، جـ = $\sqrt{٢}$

الرأسان: (٠، ± $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ )، البؤرتان: (٠، ± $\sqrt{٢}$ ) طول المحور القاطع = $\frac{٢}{\sqrt{٢}}$ = $\sqrt{٢}$ وحدة طول ،

طول المحور المرافق = ٢ × $\frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٢}}$ = $\sqrt{٦}$ وحدة طول، الاختلاف المركزي = هـ = $\frac{جـ}{أ}$ = ٢

ج) ٩س$^{٢}$ −١٦ص$^{٢}$= ١ ومنها: $\frac{\text{س}^{٢}}{\frac{١}{٩}} - \frac{\text{ص}^{٢}}{\frac{١}{١٦}} = ١$ قطع زائد سيني

الرأسان: ( $\pm\frac{١}{٣}$، ٠)، البؤرتان: ( $\pm\frac{٥}{١٢}$، ٠) طول المحور القاطع = $\frac{٢}{٣}$ وحدة طول ،

طول المحور المرافق = $\frac{١}{٢}$ وحدة طول ، الاختلاف المركزي = هـ = $\frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = \frac{٥}{٤}$

---

**س٢:** النقطة ( $\frac{\sqrt{٥٣}}{٢}$، ٢) تقع على منحنى القطع الزائد، الفرق المطلق بين النقطة والبؤرتين يعني: ٢أ ،

١٦س$^{٢}$ − ٩ ص$^{٢}$ − ١٤٤ = صفر، ومنها: $\frac{\text{س}^{٢}}{٩} - \frac{\text{ص}^{٢}}{١٦} = ١$، أي أنّ: أ = ٣

إذن: الفرق المطلق = ٦ .

---

**س٣:** بؤرة القطع المكافئ س$^{٢}$=٢٠ ص، هي (٠، ٥) إذن: القطع الزائد صادي فيه ج = ٥

هـ = $\frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = \frac{٥}{٣}$ اذن $\frac{٥}{\text{أ}} = \frac{٥}{٣}$، ومنها: أ = ٣ ، ب = ٤

معادلة القطع الناقص هي: $\frac{\text{ص}^{٢}}{٩} - \frac{\text{س}^{٢}}{١٦} = ١$

---

**س٤:** طول المحور القاطع = ٢أ = ٨ ومنها: أ = ٤، هـ = $\frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = \frac{٥}{٤}$ ← جـ = ٥

جـ$^{٢}$ = أ$^{٢}$ + ب$^{٢}$ ← ب$^{٢}$ = جـ$^{٢}$ − أ$^{٢}$ = ٢٥ − ١٦ = ٩

معادلة القطع الزائد السيني: $\frac{\text{س}^{٢}}{١٦} - \frac{\text{ص}^{٢}}{٩} = ١$

معادلة القطع الزائد الصادي: $\frac{\text{ص}^{٢}}{١٦} - \frac{\text{س}^{٢}}{٩} = ١$

---

**س٥:** $\frac{\text{س}^{٢}}{\text{ك}} - \frac{\text{ص}^{٢}}{\text{ك}-٤} = ١$، حيث إن: ٤ < ك < ٠ فإن: ٤ − ك > ٠؛ ولذلك قطع زائد سيني

أ$^{٢}$ = ك ، ب$^{٢}$ = ٤ − ك ← جـ$^{٢}$ = أ$^{٢}$ + ب$^{٢}$ = ٤ ، ومنها: جـ = ٢

هـ = $\frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = \frac{٣}{٢} = \frac{٢}{\text{أ}}$ ومنها: أ = $\frac{٤}{٣}$ ← الفرق المطلق = ٢ × أ = ٢ × $\frac{٤}{٣} = \frac{٨}{٣}$

**س١:**

| رقم الفقرة | ١ | ٢ | ٣ | ٤ | ٥ |
|---|---|---|---|---|---|
| رمز الإجابة الصحيحة | ب | د | أ | أ | د |

**س٢:** $\frac{\text{ص}^{٢}}{٢٥-\text{ع}^{٢}} - \frac{\text{س}^{٢}}{١٦-\text{ع}^{٢}} = ١$ قطع زائد صادي

جـ$^{٢}$ = أ$^{٢}$ + ب$^{٢}$ = ٩ ومنها جـ = ٣ ، البؤرتان هما: (٠، ±٣)

---

**س٣:** هذا قطع زائد صادي معادلته: $\frac{\text{ص}^{٢}}{\text{أ}^{٢}} - \frac{\text{س}^{٢}}{\text{ب}^{٢}} = ١$ يمر منحناه بالنقطتين: (٤، ٦)، (١، -٣)

بتعويض النقطة الاولى ينتج: ٣٦ب$^{٢}$ - ١٦أ$^{٢}$ = أ$^{٢}$ب$^{٢}$ ..... (١)

بتعويض النقطة الثانية ينتج: ٩ب$^{٢}$ - أ$^{٢}$ = أ$^{٢}$ب$^{٢}$ ..... (٢) بطرح ٢ من:

٢٧ب$^{٢}$ - ١٥أ$^{٢}$ = ٠ ، أي أن: ٩ب$^{٢}$ - ٥أ$^{٢}$ = ٠ إذن: ٩ب$^{٢}$ = ٥أ$^{٢}$

ب$^{٢}$ = $\frac{٥}{٩}$ أ$^{٢}$ ومنها: ٣٦ أ$^{٢}$ = ٥أ$^{٤}$

أ$^{٢}$ = $\frac{٣٦}{٥}$، ب$^{٢}$ = ٤ ← معادلة القطع الزائد: $\frac{٥\text{ص}^{٢}}{٣٦} - \frac{\text{س}^{٢}}{٤} = ١$

---

**س٤:** س = ٢ن$^{٢}$ ، ص = ٦ن ، ومنها ص$^{٢}$ = ٣٦ن$^{٢}$

ص$^{٢}$ = ٣٦ × $\frac{١}{٢}$ س ← ص$^{٢}$ = ١٨ س

معادلة القطع المكافئ مفتوح لليمين بؤرته ( $\frac{٩}{٢}$ ، ٠)

---

**س٥:** س$^{٢}$ = -٤أ ص من هندسة الشكل (٤ ، -٣) تقع على المنحنى

١٦ = -٤أ × -٣ ومنها: أ = $\frac{٤}{٣}$ ← س$^{٢}$ = -$\frac{١٦}{٣}$ ص.

## تمارين ومسائل: (٧ - ١) نهاية الإقتران عند نقطة

**س١:** $\lim_{س \to -١} (س^{٢} - ٢س) = ٣$ ، $\lim_{س \to -١^{+}} (س^{٢} - ٢س) = ٣ \leftarrow \lim_{س \to -١} (س^{٢} - ٢س) = ٣$

**س٢:** $\lim_{س \to ٣} \frac{|س^{٢} - ٧س + ١٢|}{س - ٣}$، غير موجودة (وضح ذلك باستخدام الجدول)

**س٣:** $ن(س) = س - \left[\frac{س}{٢}\right] = ن(س) = \begin{cases} س - ٠ & ، \ ٠ \leq س < ٢ \\ س - ١ & ، \ ٢ \leq س < ٤ \end{cases}$

$\lim_{س \to ٢^{-}} ن(س) = ٢$ ، $\lim_{س \to ٢^{+}} ن(س) = ١$ ولذلك $\lim_{س \to ٢} ن(س)$ غير موجودة. (وضح بالرسم)

**س٤:** $\lim_{س \to ٣} \sqrt{س - ٢} = ١$ (وضح بالرسم)

**س٥:** $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} جا س = ١$ (وضح بالرسم)

## تمارين ومسائل: (٧ - ٢) نظريات النهايات

**س١:** أ) $\lim_{س \to ١} \frac{س \times ن(س)}{٢ هـ(س)} = \frac{\lim_{س \to ١} س \times \lim_{س \to ١} ن(س)}{\lim_{س \to ١} ٢ هـ(س)} = \frac{١ \times -٢}{١ \times ٢} = -١$

ب) $\lim_{س \to ١} (ن(س) + ٢س)° = (\lim_{س \to ١} ن(س) + \lim_{س \to ١} ٢س)° = (-٢ + ٢)° =$ صفر

ج) $\lim_{س \to ١} \sqrt{٣ ن(س) + ١٠} = \sqrt{\lim_{س \to ١} ٣ ن(س) + \lim_{س \to ١} ١٠} = \sqrt{٤} = ٢$

---

**س٢:** أ) $\lim_{س \to -٢} \frac{٢س^{٣} + ٤س^{٢}}{س^{٣} + ٨} = \frac{-٢^{٣} + ٤}{-٢^{٣} + ٨} = \frac{٢}{١١}$.

ب) $\lim_{ص \to -١} \frac{\sqrt{ص^{٢} + ٣}}{٢ص^{٢} - ١} = \frac{\sqrt{٤}}{-٢ - ١} = ٢$

ج) $\lim_{ع \to ١} (ع جتا \pi ع + جا ٢\pi ع) = \lim_{س \to ٠} (جتا \pi + جا ٢\pi) = -١$.

د) $ن(س) = |س^{٢} - ٦س + ٥| = \begin{cases} س^{٢} - ٦س + ٥ & ، \ س \geq ١ \\ -(س^{٢} - ٦س + ٥) & ، \ ١ < س < ٥ \\ س^{٢} - ٦س + ٥ & ، \ س \geq ٥ \end{cases}$

$\lim_{س \to ٥^{+}} ن(س) = ٠$ ، $\lim_{س \to ٥^{-}} ن(س) = ٠$ ← $\lim_{س \to ٥} ن(س) = ٠$ ولذلك $\lim_{س \to ٥} ن(س) = ٠$

---

**س٣:** $ن(س) = [\frac{١}{٣}س + ١] = \begin{cases} ٠ & ، \ -٣ \geq س < ٠ \\ ١ & ، \ ٠ \geq س < ٣ \\ ٢ & ، \ ٣ \geq س < ٦ \end{cases}$ =

أ) $\lim_{س \to -٢} ن(س) = ٠$

ب) $\lim_{س \to -٣^{-}} ن(س) + ٢س) = \lim_{س \to -٣^{-}} (١ + ٢س) = ٧$

$\lim_{س \to -٣^{+}} ن(س) + ٢س) = \lim_{س \to -٣^{+}} (٢ + ٢س) = ٨$ ← $\lim_{س \to ٣} ن(س) + ٢س)$ غير موجودة.

---

**س٤:** $ن(س) = |س^{٢} - س - ٢| + |س + ٣|$ نعيد التعريف من خلال مهارة بحث الإشارة للاقتران:

$ن(س) = \begin{cases} س^{٢} - ٢س - ٥ & ، \ س < -٣ \\ س^{٢} + ١ & ، \ -٣ \leq س \leq -١ \\ -س^{٢} + ٢س + ٥ & ، \ -١ < س < ٢ \\ س^{٢} + ١ & ، \ س \leq ٢ \end{cases}$

أ) $\lim_{س \to ٢} ن(س) = ٥$ (لاحظ النهاية اليمنى = النهاية اليسرى عند نقطة التحول س = ٢)

ب) $\lim_{س \to -٣} (ن(س) + س^٢) = ١٩$ (لاحظ النهاية اليمنى = النهاية اليسرى عند نقطة التحول س = -٣).

---

**س٥:** أ) $\lim_{س \to ٢} (أ س^٢ + ٣س - ٢أ) = ١٠$ ومنها: $(٤أ + ٦ - ٢أ) = ١٠$ ومنها: $أ = ٢$

ب) $\lim_{س \to ١} ن(س) + ٣) = \lim_{س \to ١} (٢س^٢ + ٣س - ٤ + ٣) = ٤$

---

**س٦:** النهاية موجودة عند س ← ٢ ؛ ولذلك: $\lim_{س \to ٢^-} ن(س) = \lim_{س \to ٢^+} ن(س)$

$٤أ + ٧ = ٤ + ١٠أ$ ومنها: $أ = \frac{١}{٢}$

## تمارين ومسائل: (٧ - ٣) النهايات والصور غير المعينة

**س١:** أ) $\lim_{س \to -٢} \frac{س^٢ + ٢س}{س^٢ - ٤} = \lim_{س \to -٢} \frac{س(س + ٢)}{(س+٢)(س-٢)} = \lim_{س \to -٢} \frac{س}{(س-٢)} = \frac{١}{٢}$

ب) $\lim_{س \to ٥} \frac{(س-٢)(س-٥)}{(٥ - س)} = -٣$

ج) $\lim_{س \to ٣} \frac{س(س-٣)(س-٢)}{(س - ٣)} = ٣$

د) $\lim_{س \to ٢\sqrt{}} \frac{س^٨ - ١٦}{س^٤ - ٤} = \lim_{س \to ٢\sqrt{}} \frac{(س^٤ - ٤)(س^٤ + ٤)}{(س^٤ - ٤)} = ٤ + ٤ = ٨$

هـ) $\lim_{س \to ٥} \frac{\sqrt{٢س + ٦} - ٤}{٢س - ١٠} \times \frac{\sqrt{٢س + ٦} + ٤}{\sqrt{٢س + ٦} + ٤} = \lim_{س \to ٥} \frac{٢س - ١٠}{٢س - ١٠} \times \frac{١}{\sqrt{٢س + ٦} + ٤} = \frac{١}{٨}$

---

**س٢:** $\lim_{س \to -٢} ن(س) = \lim_{س \to ٢^+} ن(س)$ ؛ لأن النهاية موجودة

$$\text{نهـــا}_{س\to 2^+} \frac{س^2 + 2س - 8}{س - 2} = \text{نهـــا}_{س\to 2^+} \frac{أس^2 + س - 4}{س^2 + 1} \quad \ldots\ldots\ldots \text{ ومنها: } أ = 8$$

**س٢:** $\text{نهـــا}_{س\to 2} \frac{أس^2 - بس - 6}{(س - 2)} = 5$ أي موجودة وقيمتها معلومة.

عندما: س ⟵ ٢ المقام = صفر؛ ولذلك حتى تكون النهاية موجودة عندما: س ⟵ ٢ فإنّ البسط = صفر .

$٤أ - ٢ب - ٦ = 0$ ومنها $٢أ - ب = ٣ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ ومنها $٢أ - ٣ = ب$

$$\text{نهـــا}_{س\to 2} \frac{أس^2 - (٢أ - ٣)س - 6}{(س - 2)} = 5$$

$$\text{نهـــا}_{س\to 2} \frac{(أس + 3)(س - 2)}{(س - 2)} = 5 \text{ ومنها: } ٢أ + ٣ = 5 \text{ ومنها: } أ = ١ \text{ ، } ب = -١$$

## تمارين ومسائل: (٧ - ٤) نهايات الاقترانات الدائرية

**س١:** أ) $\text{نهـــا}_{س\to 0} \frac{ظا^2 ٣س}{جا^2 ٧س} = \text{نهـــا}_{س\to 0} \left(\frac{ظا^2 ٣س}{س^2} \div \frac{جا^2 ٧س}{س^2}\right) = \text{نهـــا}_{س\to 0} \left(\frac{ظا ٣س}{س}\right)^2 \div \left(\frac{جا ٧س}{س}\right)^2 = \frac{٩}{٤٩}$

ب) $\text{نهـــا}_{س\to 0} \frac{١}{س^2 ظتا^2 \pi س} = \text{نهـــا}_{س\to 0} \frac{ظا^2 \pi س}{س^2} = \pi^2$

ج) $\text{نهـــا}_{س\to 0} \frac{ظاس\, جا ٥س}{٣س} = \text{نهـــا}_{س\to 0} ظاس \times \text{نهـــا}_{س\to 0} \frac{جا ٥س}{٣س} = ٠ \times \frac{٥}{٣} = ٠$

د) $\text{نهـــا}_{س\to 0} \frac{-٣جاس}{٥ظتا ٣س} = \text{نهـــا}_{س\to 0} \frac{-٣جاس}{٥} \times ظا٣س = ٠$

---

**س٢:** أ) $\text{نهـــا}_{س\to 0} \frac{جتاس - جتا ٣س}{١ - جتا ٧س} = \text{نهـــا}_{س\to 0} \frac{\left(١ - ٢جا^2 \frac{س}{٢}\right) - \left(١ - ٢جا^2 \frac{٣س}{٢}\right)}{١ - (١ - ٢جا^2 \frac{٧س}{٢})} =$

$$= \text{نهـــا}_{س\to 0} \frac{-٢جا^2 \frac{س}{٢} + ٢جا^2 \frac{٣س}{٢}}{٢جا^2 \frac{٧س}{٢}} = \frac{-\frac{١}{٤} + \frac{٩}{٤}}{\frac{٤٩}{٤}} = \frac{٨}{٤٩}$$

ب) $\text{نهـــا}_{س\to 0} \frac{١ - جتا ٥س}{س جا ٥س} \times \frac{١ + جتا ٥س}{١ + جتا ٥س} = \text{نهـــا}_{س\to 0} \frac{١ - جتا^2 ٥س}{(س جا ٥س) \times (١ + جتا ٥س)}$

$$= \text{نهـــا}_{س\to 0} \frac{جا ٥س}{س} \times \frac{\cancel{جا ٥س}}{\cancel{جا ٥س}} \times \frac{١}{(١ + جتا ٠)} = \frac{٥}{٢}$$

**س٣:** $ن(س) = \frac{\sqrt{جا^{٢}س}}{س} = \frac{|جاس|}{س}$

$نهـا_{س \leftarrow ٠^-} \frac{-جاس}{س} = -١$ ، $نهـا_{س \leftarrow ٠^+} \frac{جاس}{س} = ١$، $نهـا_{س \leftarrow ٠^-} ن(س) \neq نهـا_{س \leftarrow ٠^+} ن(س)$ ← $نهـا_{س \leftarrow ٠} ن(س)$ غير موجودة

---

**س٤:** $نهـا_{س \leftarrow ٠} \frac{أ - جتاب س}{س^{٢}} = \frac{٩}{٢}$ النهاية موجودة وقيمتها معلومة.

قيمة البسط عندما س ← ٠ يساوي صفراً ، ولكي تكون النهاية موجودة قيمة المقام عندما س ← ٠ تساوي صفراً
أ - جتا ٠ = ٠ أي أ - ١ = ٠ ومنها: أ = ١

$نهـا_{س \leftarrow ٠} \frac{أ - جتاب س}{س^{٢}} = نهـا_{س \leftarrow ٠} \frac{١ - \left(١ - ٢جا^{٢}\frac{ب س}{٢}\right)}{س^{٢}} = \frac{٩}{٢}$ ومنها: $نهـا_{س \leftarrow ٠} \frac{٢جا^{٢}\frac{ب س}{٢}}{س^{٢}} = \frac{٩}{٢}$

ومنها: $٢ \times \frac{ب^{٢}}{٤} = \frac{٩}{٢}$ ومنها: ب = ± ٣

أو: $نهـا_{س \leftarrow ٠} \frac{١ - جتاب س}{س^{٢}} \times \frac{١ + جتاب س}{١ + جتاب س} = \frac{٩}{٢}$ ومنها: $نهـا_{س \leftarrow ٠} \frac{جتا^{٢}ب س}{س^{٢}} \times \frac{١}{٢} = \frac{٩}{٢}$

ومنها: $\frac{ب^{٢}}{٢} = \frac{٩}{٢}$ ومنها: ب = ± ٣

## تمارين ومسائل: (٧ - ٥) نهاية الإقتران عند س ← ± ∞

**س١:** أ) $نهـا_{س \leftarrow \infty} (س^{٣} - ٢س + ٥) = نهـا_{س \leftarrow \infty} س^{٣}(١ - \frac{٢}{س^{٢}} + \frac{٥}{س^{٣}}) = \infty \times ١ = \infty$.

ب) $نهـا_{س \leftarrow \infty} \frac{(س^{٢}+٣)(س+٥)}{(٣س^{٢}+٣)^{٢}} = نهـا_{س \leftarrow \infty} \frac{س^{٣}+٥س^{٢}+٣س+١٥}{٩س^{٤}+١٨س^{٢}+٩} = نهـا_{س \leftarrow \infty} \frac{س^{٣}\left(١ + \frac{٥}{س} + \frac{٣}{س^{٢}} + \frac{١٥}{س^{٣}}\right)}{س^{٤}\left(٩ + \frac{١٨}{س^{٢}} + \frac{٩}{س^{٤}}\right)}$

$= نهـا_{س \leftarrow \infty} \frac{١}{س} \times \frac{١}{٩} = ٠$

ج) $نهـا_{س \leftarrow \infty} \left(\frac{}{س^{٢}-١} - \frac{س+٢}{س+١}\right) = نهـا_{س \leftarrow \infty} \frac{(س^{٢}-٢)(س+١) - (س+٢)(س-١)}{(س-١)(س+١)} = نهـا_{س \leftarrow \infty} \left(\frac{س^{٣}-٣س}{س^{٢}-١}\right)$

$= نهـا_{س \leftarrow \infty} \left(\frac{س^{٣}\left(١ - \frac{٣}{س}\right)}{س^{٢}\left(١ - \frac{٢}{س^{٢}}\right)}\right) = نهـا_{س \leftarrow \infty} س \times ١ = \infty$

د) $\text{نهـــا}_{س\to\infty}\left(\frac{س^{-٢}-٢}{٣س^{٢}+٢س-٥}\right)^{٥}=\left(\text{نهـــا}_{س\to\infty}\left(\frac{س^{-٢}-٢}{٣س^{٢}+٢س-٥}\right)\right)^{٥}=\ldots\ldots=\left(\frac{١}{٣}\right)^{٥}=\frac{١}{٢٤٣}$

هـ) $\text{نهـــا}_{س\to-\infty}\frac{|٣س^{-٢}-٥|}{٣س^{٢}+٣}=\text{نهـــا}_{س\to-\infty}\frac{٣س^{-٢}-٥}{٣س^{٢}+٣}=\ldots\ldots\ldots=١$

---

**س٢:** $\text{نهـــا}_{س\to\infty}\frac{(أ-٢)س^{٤}+٣س^{٢}+٢س-١}{ب\,س^{٢}+٣س+٣}=-١$

النهاية موجودة ومعلومة القيمة، ودرجة المقام = ٢ ؛ ولذلك ستكون درجة البسط = ٢

ويتحقق عندما: (أ – ٢) = ٠، ومنها: (أ = ٢)

$\text{نهـــا}_{س\to\infty}\frac{٣س^{٢}+٢س-١}{ب\,س^{٢}+٣س+٣}=-١\longleftarrow\frac{٣}{ب}=-١$ ومنها: ب = –٣

## تمارين ومسائل: (٧ - ٦) الاتصال

**س١:** أ) ن(س) = |س$^{٢}$ + ٢س – ١٨| + ٢س متصل عند س = ٢

لأنّ ما في داخل القيمة المطلقة كثير حدود متصل عند س = ٢، ومجموع اقترانين متصلين.

عند س = ٢ يكون متصلاً عند س = ٢

أو إعادة التعريف للقيمة المطلقة فيكون متصلاً عند س = ٢

ب) $ن(س)=س^{٢}\times[س-٢,٠]\longleftarrow ن(س)=\begin{cases}-٢س^{٢} & ،\ -١,٨\geq س>-٠,٨\\ -١س^{٢} & ،\ -٠,٨\geq س>٠,٢\end{cases}$

ن(–٠,٨)= –٠,٦٤ ، $\text{نهـــا}_{س\to-٠,٨}$ ن(س)، غير موجودة إذن: ن(س) غير متصل عند س = –٠,٨

ج) ن(س) = ظا(٢πس) – جتا(٢πس) متصل عند س = $\frac{١}{٢}$ لتحقق شروط الاتصال.

ن($\frac{١}{٢}$) = ظا(π) – جتا(π) = ١ $\longleftarrow$ $\text{نهـــا}_{س\to\frac{١}{٢}}$ ن(س) = –١ ومنها ن($\frac{١}{٢}$) = $\text{نهـــا}_{س\to\frac{١}{٢}}$ ن(س) = ١

---

**س٢:** $\text{نهـــا}_{س\to٣}\frac{(\sqrt{٥س+١}-٤)}{س-٣}\times\frac{(\sqrt{٥س+١}+٤)}{(\sqrt{٥س+١}+٤)}=\text{نهـــا}_{س\to٣}\frac{٥س+١-١٦}{((س-٣)(\sqrt{٥س+١}+٤))}$

$=\text{نهـــا}_{س\to٣}\frac{٥(س-٣)}{((س-٣)(\sqrt{٥س+١}+٤))}=\frac{٥}{٨}$

ن(٣) = ٢ ومنها: ن(س) غير متصل عند س = ٣ ؛لأنّ: ن(٣) $\neq$ $\text{نهـــا}_{س\to٣}$ ن(س).

**س٣:** أ) ن(س) = جا٢س + | ٣س − ٣| متصل ∀ س ∈ ع؛لأنه مجموع اقترانين متصلين على ع.

ن$_{١}$(س) = جا٢س متصل على ع، ن$_{٢}$(س) = | ٣س − ٣| ما في داخل القيمة المطلقة متصل على ع.

ب) ن(س) = [ ١ − $\frac{س}{٣}$] ، س ∈ [ −٣، ٥]

$$ن(س) = \begin{cases} ٢ & ، \quad س = -٣ \\ ١ & ، \quad -٣ < س \leq ٠ \\ ٠ & ، \quad ٠ < س \leq ٣ \\ -١ & ، \quad ٣ < س \leq ٥ \end{cases}$$

ن(س) متصل على الفترات ]−٣، ٠[ ، ]٠، ٣[ ، ]٣، ٥] كثيرات حدود

من خلال بحث شروط الاتصال ن(س) منفصل عند س = ٠، ٣. يمين س = -٣

ن(س) متصل على ]-٣، ٥] - { ٠ ، ٣}

---

**س٤:** ن(س) متصل على مجاله ⟵ ن(س) متصل عند نقاط التحول، وهي: س = ١، س = ٣

ن(١) = $\lim_{س \to ١^-}$ ن(س) = $\lim_{س \to ١^+}$ ن(س) ومنها: أ = ٢

ن(٣) = $\lim_{س \to ٣^-}$ ن(س) = $\lim_{س \to ٣^+}$ ن(س) ومنها: ب = ١٠

---

**س٥:** أ) ن(س) منفصل عند س = − ١، ١.

ب) ن(س) متصل ∀ س ∈ [−٢، −١] من الرسم متصل وكذلك متصل من الجهتين: اليمنى واليسرى.

ج) ن(س) غير متصل على الفترة [−١، ∞[؛ لأنه غير متصل عند س= − ١، ١.

د) ن(س) متصل ∀ س ∈ ]−∞، −٢]؛ لتحقق شروط الاتصال من الرسم.

هـ) ن(س) غير متصل على مجاله ⟵ ن(س) متصل ∀ س ∈ ع− {−١، ١}

## تمارين ومسائل: (٧ - ٧) بلزانو

**س١:** تتحقق شروط بلزانو على الفترتين، [−٣ ، −١ ]، [ ٤ ، ٥] يمكن الجزم بوجود صفري اقتران

ولكن ن(٠) = ٠ إذن: يوجد صفر ثالث ⟵ أقل عدد من الأصفار يمكن التحقق من وجودها ٣.

**س٢:** $ن(س) = س^{٣} - ٢س^{٢} + ٢$ متصل على الفترة $[-٢ ، ٤]$ ؛ لأنه اقتران كثير حدود.

$ن(-٢) > ٠ ، ن(٤) < ٠$

$ن(-٢) \times ن(٤) < ٠$

تتحقق شروط بلزانو، يوجد على الأقل جـ $\in ]-٢ ، ٤[$ بحيث: $ن(جـ) = ٠$

التقريب الأول $جـ_{١} = \frac{-٢ + ٤}{٢} = ١$ ، $ن(١) = ١ > ٠$

بالمثل تنطبق بلزانو على الفترة $[-٢ ، ١]$

يوجد على الأقل جـ $\in ]-٢ ، ١[$ بحيث $ن(جـ) = ٠$

التقريب الثاني $جـ_{٢} = \frac{-٢ + ١}{٢} = -\frac{١}{٢}$ ، $ن(-\frac{١}{٢}) > ٠$

بالمثل تنطبق بلزانو على الفترة: $[-٢ ، -\frac{١}{٢}]$

يوجد على الأقل جـ $\in ]-٢ ، -\frac{١}{٢}[$ بحيث $ن(جـ) = ٠$

التقريب الثاني $جـ_{٣} = \frac{-٢ + -٠,٥}{٢} = -١,٢٥$

---

**س٣:** $ن(س) = \begin{cases} |س + ٢| & ، \ ١ \geq س > ٢ \\ ٨ - س^{٢} & ، \ ٢ \geq س \geq ٥ \end{cases}$ ، $ن(س) = \begin{cases} س + ٢ & ، \ ١ \geq س > ٢ \\ ٨ - س^{٢} & ، \ ٢ \geq س \geq ٥ \end{cases}$

$ن(س)$ متصل على $[١ ، ٢[$، وكذلك على الفترة $]٢ ، ٥]$ كثيرات حدود.

عند س = ٢ تتحقق شروط الاتصال $ن(٢) = \lim_{س \to ٢^{+}} ن(س) = \lim_{س \to ٢^{-}} ن(س) = ٤$ متصل عند س = ٢

ومنها: $ن(س)$ متصل على الفترة $[٢ ، ٥]$

$ن(١) \times ن(٥) < ٠$ تتحقق شروط نظرية بلزانو

يوجد على الأقل: جـ $\in ]١ ، ٥[$ بحيث $ن(جـ) = ٠$

$ن(جـ) = \begin{cases} جـ + ٢ & ، \ ١ \geq جـ > ٢ \\ ٨ - جـ^{٢} & ، \ ٢ \geq جـ \geq ٥ \end{cases}$

جـ = $-٢$ مرفوض لا ينتمي إلى الفترة $]١ ، ٢[$

$جـ^{٢} = ٨$ ومنها: جـ $= ٢\sqrt{٢} \in ]٢ ، ٥[$، جـ $= -٢\sqrt{٢} \notin ]٢ ، ٥[$.

---

**س٤:** نفرض $ك(س) = ن(س) - ١٣ = س^{٣} + س^{٢} - ٢س - ٨ \ \forall$ س $\in [-١ ، ٣]$

$ك(س)$ متصل على الفترة $[-١ ، ٣]$ ؛ لأنه اقتران كثير حدود.

$ك(-١) \times ك(٣) < ٠$ تتحقق شروط بلزانو

يوجد على الأقل: جـ ∈ ]-١ ، ٣[ بحيث ك(جـ) = ٠ أي ك(جـ) = ن(جـ) - ١٣ = ٠

يوجد على الأقل: جـ ∈ ]-١ ، ٣[ بحيث: ن(جـ) = ١٣

---

**س٥:** نبحث تحقق الشروط على الاقتران هـ(س) = ( س$^{٢}$ - ٥ ) ن (س)

هـ(س) متصل على الفترة [١، ٧] ؛ لأنه حاصل ضرب اقترانين متصلين على [١، ٧]

هـ(١) = -٤ × ن(١) < ٠ لأن ن(١) موجبة ؛ لأنها تقع في الربع الأول.

هـ(٧) = ٤٤ × ن(٧) < ٠ لأن ن(٧) موجبة ؛ لأنها تقع في الربع الأول.

هـ(١) × هـ(٧) < ٠

تتحقق شروط نظرية بلزانو إذن: يوجد على الأقل جـ ∈ ]١ ، ٧[ بحيث: هـ(جـ) = ٠

التقريب الأول: جـ$_{١}$ = $\frac{١ + ٧}{٢}$ = ٤

هـ(٤) = ١١ × ن(٤) < ٠ تتحقق شروط بلزانو.

التقريب الثاني: جـ$_{٢}$ = $\frac{١ + ٤}{٢}$ = ٢,٥

هـ(٢,٥) < ٠ بالمثل تتحقق بلزانو على الفترة [ ١ ، ٢,٥ ]

التقريب الثالث: جـ$_{٣}$ = $\frac{١ + ٢,٥}{٢}$ = ١,٧٥

## تمارين عامة الوحدة السابعة

**س١:**

| الفقرة | ١ | ٢ | ٣ | ٤ | ٥ | ٦ | ٧ | ٨ | ٩ | ١٠ | ١١ | ١٢ | ١٣ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| رمز الإجابة الصحيحة | د | أ | ج | ج | ب | أ | د | أ | ج | ج | ج | ب | ج |

**س٢:** ن (س) متصل على ⟵ ع متصل عند س = ٣

ن (٣) = $\lim_{س \to ٣}$ هـ(س) = ١١

$\lim_{س \to ٣}$ $\frac{س^{٢} - (٣ - ٢ب)س - ٦ب}{س - ٣}$ = ١١

$\lim_{س \to ٣}$ $\frac{(س - ٣)(س + ٢ب)}{س - ٣}$ = ١١

$\lim_{س \to ٣}$ ( س + ٢ب) = ١١ ، ( ٣ + ٢ب ) = ١١ ، ب = ٤

**س٣:** $\text{نهـــا}_{س \to -\infty} \frac{(س^{٢}+١)^{٢}}{أ س^{٢}(س+١)^{٢}} = -٢$

درجة البسط = ٤

ولذلك لكي تكون النهاية موجودة يجب أن تكون درجة المقام = ٤

ومنها: $ن = ٢ \leftarrow \text{نهـــا}_{س \to -\infty} \frac{(س^{٢}+١)^{٢}}{أ س^{٢}(س+١)^{٢}} = -٢$

$$\text{نهـــا}_{س \to -\infty} \frac{س^{٤}+٢س^{٢}+١}{أ\ س^{٢}(س^{٢}+٣س+١)} = -٢$$

$$أ = -٢ ، ب = -\frac{١}{٢}$$

---

**س٤:** نفرض ك(س) = ن(س) − هـ (س)

ك(١) = ن(١) − هـ (١) < ٠ لأن ن(١) < هـ (١) معطى

ك(٢) = ن(٢) − هـ (٢) > ٠ لأن ن(٢) > هـ (٢) معطى

ك(١) × ك(٢) < ٠

ن(س) ، هـ (س) كثيرا حدود ، إذن: متصلان على الفترة [ ١ ، ٢ ]

ك(س) = ن(س) − هـ (س)، لأنه ناتج طرح اقترانين متصلين.

تتحقق شروط نظرية بلزانو ، إذن: يوجد على الأقل جـ ∈ ] ١ ، ٢ [

بحيث: ك(جـ) = ٠ ومنها ن(جـ) − هـ (جـ) = ٠ ← ن(جـ) = هـ (جـ)

---

**س٥:** نفرض: ن(س) = $س^{٣} - ٧$

نختار الفترة [ ١ ، ٢ ] لأن $١ < ٧ < ٨ \leftarrow \sqrt[٣]{١} < \sqrt[٣]{٧} < \sqrt[٣]{٨} \leftarrow ١ < \sqrt[٣]{٧} < ٢$

ن(س) متصل على الفترة [ ١ ، ٢ ]؛ لأنه كثير حدود .

ن(١) = −٦ < ٠

ن(٢) = ١ > ٠

ن(١) × ن(٢) < ٠

تتحقق شروط نظرية بلزانو إذن: يوجد على الأقل جـ ∈ ] ١ ، ٢ [ بحيث: ن(جـ) = ٠

التقريب الأول = $جـ_{١} = \frac{١+٢}{٢} = ١,٥$

$ن(١,٥) > ٠$

نطبق بلزانو على الفترة [ ١,٥ ، ٢ ] تتحقق الشروط

تتحقق شروط نظرية بلزانو إذن: يوجد على الأقل جـ ∈ ] ١,٥ ، ٢ [ بحيث: ن(جـ) = ٠

التقريب الثاني = $جـ_٢ = \frac{١,٥ + ٢}{٢} = ١,٧٥$

$ن(١,٧٥) > ٠$

نطبق بلزانو على الفترة [ ١,٧٥ ، ٢ ] تتحقق الشروط.

تتحقق شروط نظرية بلزانو إذن: يوجد على الأقل جـ ∈ ] ١,٧٥ ، ٢ [ بحيث: ن(جـ) = ٠

التقريب الثالث = $جـ_٣ = \frac{١,٧٥ + ٢}{٢} = ١,٨٧٥$